Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a X-a

P1.Fie f o funcţie bijectivă şi impară. Să se arate că inversa f^{-1} este impară.

P2. a) Demonstraţi că pentru orice număr natural $k \geq 1$, avem:

$$k + \frac{1}{2} - \frac{1}{8k} < \sqrt{k^2 + k} < k + \frac{1}{2} - \frac{1}{8k} + \frac{1}{16k^2}.$$

b) Notăm cu α, β, γ cifra unităţilor, miilor respectiv cifra zecimilor numărului:

$$\sum_{k=1}^{2012} \sqrt{k(k+1)(k^2+k+1)}.$$

Demonstraţi că $\alpha + \beta = \gamma$.

P3. Să se rezolve ecuaţia:

$(n+1)^x + (n+3)^x + (n^2+2n)^x = n^x + (n+2)^x + (n^2+4n+3)^x, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

P4. Fie $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{3}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{2}\}$ şi $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

a) Să se arate că $A + B = A \cdot B \neq \mathbb{C}$, unde

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}.$

b) Să se arate că nu există nici o mulţime nevidă $Y \subset \mathbb{C}$ astfel ca

$$X + Y = X \cdot Y \neq \mathbb{C}.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

Soluţie P1. f este impară $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$. **(1p)**
Facem substituţia $x = f^{-1}(y)$ şi rezultă
$f(-f^{-1}(y)) = -f(f^{-1}(y)) = -y$. **(3p)**
Aplicăm f^{-1} şi obţinem:
$f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) = f^{-1}(-y)$. **(2p)**
$-f^{-1}(y) = f^{-1}(-y)$. **(1p)**

Soluţie P3. Notând $n = a,\ \ n+1 = b,\ \ n+2 = c,\ \ n+3 = d$ ecuaţia devine

$b^x + d^x + a^x \cdot c^x = a^x + c^x + b^x \cdot d^x \Leftrightarrow a^x \cdot c^x - a^x - c^x + 1 = b^x \cdot d^x - b^x = d^x + 1$

$$(a^x - 1)(c^x - 1) = (b^x - 1)(d^x - 1)(*)\text{unde } 1 < a < b < c < d$$

.... **2 puncte**

1) Dacă $x < 0$ atunci $\left(\frac{b}{a}\right)^x < \left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1$ şi $\left(\frac{d}{c}\right)^x < \left(\frac{d}{c}\right)^0 = 1 \Rightarrow b^x < a^x$ şi $d^x < c^x \Rightarrow b^x - 1 < a^x - 1 < 0$

şi $d^x - 1 < c^x - 1 < 0 \Rightarrow (b^x - 1)(d^x - 1) > (a^x - 1)(c^x - 1)$, deci ecuaţia (*) nu are soluţii pe $(-\infty, 0)$. .... **2 puncte**

2) Dacă $x > 0$ atunci $\left(\frac{b}{a}\right)^x > \left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1$şi $\left(\frac{d}{c}\right)^x > \left(\frac{d}{c}\right)^0 = 1 \Rightarrow b^x > a^x$şi $d^x > c^x \Rightarrow b^x - 1 > a^x - 1 > 0$

şi $d^x - 1 > c^x - 1 > 0 \Rightarrow (b^x - 1)(d^x - 1) > (a^x - 1)(c^x - 1)$, deci ecuaţia (*) nu are soluţii pe $(0, \infty)$. .... **2 puncte**

3) Cum $x = 0$ este soluţie rezultă că unica soluţie este $x = 0$. . . . **1 puncte**.

Soluţie P4. Avem

$A + B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \right\}$ **(1p)**

$A \cdot B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \right\}$. **(1p)**

b) Presupunem prin absurd că putem găsi o mulţime nevidă $Y \subset \mathbb{C}$ astfel ca

$$X + Y = X \cdot Y = Z \neq \mathbb{C}.$$

Pentru orice $y_0 \in Y$ avem că $y_0 + X \subset Z$ şi $y_0 \cdot X \subset Z$, deci cercul C_0 de centru y_0 şi rază 1 este inclus în Z şi cercul C_1 de centru 0 şi rază $|y_0|$ este inclus în Z. **(1p)**

Fie acum un punct arbitrar $z_1 \in C_0 \setminus C_1$. Din $z_1 \in Z = X \cdot Y$, există $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$ astfel ca $z_1 = x_1 \cdot y_1$, deci $|z_1| = |y_1|$. Acum din $y_1 \in Z$ rezultă $y_1 + X \subset Z$ şi $y_1 \cdot X \subset Z$ deci Z conţine cercul de centru y_1 şi rază 1 şi cercul de centru 0 şi rază $|z_1|$. Astfel Z conţine întreaga coroană circulară $Z_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |y_0| - 1 \leq |z| \leq |y_0| + 1\}$. **(2p)**

Acum luăm $y_2 \in Y$ cu $|y_2| = |y_0| + 1$ şi $y_3 \in Y$ cu $|y_3| = |y_0| - 1$ şi analog obţinem că întreaga coroană circulară $Z_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |y_0| - 2 \leq |z| \leq |y_0| + 2\}$ este inclusă în Z. **(1p)**

Cu acelaşi raţionament obţinem un şir de coroane circulare $Z_n \subset Z$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Z_n = \mathbb{C}$ astfel ca $Z = \mathbb{C}$,

contradicţie cu ipoteza ($Z \neq \mathbb{C}$). **(1p)**