Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a XI-a

Barem de corectare.

P1. Fie $L = (11\ldots1) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ matricea linie cu toate elementele egale cu 1. Atunci $L \cdot I_n \cdot L^t = (n)$. (**2p**)

Din ipoteză rezultă

$$\begin{aligned}(n) &= L \cdot A \cdot A^t \cdot L^t = L \cdot A \cdot (L \cdot A)^t \\ &= (c_1 c_2 \ldots c_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2),\end{aligned}$$

unde $c_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}$ este suma elementelor de pe coloana k a matricei A. (**2p**)

Atunci $n = c_1^2 + c_2^2 + \ldots c_n^2 \geq \dfrac{1}{n}(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^2$. (**2p**)

Rezultă $n \geq \left| \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \right| = \left| \sum\limits_{i \leq i,j \leq n} a_{ij} \right|$. (**1p**)

P2.

a) Din relaţia de recurenţă rezultă $x_n > 0$, $\forall\ n \geq 1$. Pe de altă parte $x_{n+1} - x_n = \frac{a}{x_1+x_2+\cdots+x_n} > 0$, deci şirul este strict crescător. (**1p**)

Presupunem prin absurd că şirul este convergent la un număr real l. Cum şirul este strict crescător avem că $l \neq 0$ şi $x_n < l$, $n \in \mathbb{N}$. Iterăm relaţia de recurenţă şi obţinem

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1 + \frac{a}{x_1} + \frac{a}{x_1+x_2} + \cdots + \frac{a}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \\ &> x_1 + \frac{a}{l} + \frac{a}{2l} + \cdots + \frac{a}{nl} \\ &= 1 + \frac{a}{l}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \qquad (\mathbf{1p})$$

Trecând la limită în relaţia de mai sus rezultă că $l \geq \infty$.
Contradicţie. (**1p**)

b) Valoarea limitei este $\sqrt{2a}$.

Aplicăm lema Cesaro-Stolz şi avem (**1p**)

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{x_1+x_2+\cdots+x_n}}{\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \cdot \frac{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\ln n}} \cdot \frac{n\sqrt{\ln n}}{n\ln\frac{n+1}{n}}\right) \\ &= 2a \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{\ln n}}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \end{aligned} \qquad (\mathbf{1p})$$

$$\begin{aligned} L &= 2a \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)} - n\sqrt{\ln n}}{x_{n+1}} \\ &= 2a \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{x_{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)} - n\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\ln(n+1)}}\right) \\ &= \frac{2a}{L} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)} - n\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\ln(n+1)}} \\ &= \frac{2a}{L}. \end{aligned}$$

(**1p**)

Rezultă că $L = \sqrt{2a}$. Demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)} - n\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\ln(n+1)}} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}\right)}{\sqrt{\ln(n+1)}} =$$

$$= 1 + \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}\left(\sqrt{\ln(n+1)} + \sqrt{\ln n}\right)} = 1.$$

P3.

Vom arăta că $n \geq 3$. **(2p)**

Pentru $n = 2$ din $(AB)^2 = 0$ rezultă $B(AB)^2A = 0$, ceea ce este echivalent cu $(BA)^3 = 0$, deci BA este nilpotentă şi atunci $(BA)^2 = 0$. **(1p)**

Pentru $n = 3$ considerăm

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avem

$$A_3B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_3B_3)^2 = 0$$

$$B_3A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B_3A_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C \neq 0.$$

(2p)

Pentru $n > 3$ considerăm

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_3B_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad BA = \left(\begin{array}{c|c} B_3A_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(AB)^2 = 0, \ (BA)^2 = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \neq 0.$$

(2p)

P4. Mai întâi arătăm că dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = x$, atunci $x = 0$ şi $f(0) = 0$: din $f(x) = x$ rezultă $f^n(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi din ipoteză $f^{n(x)}(x) = 0$ rezultă $x = 0$ şi $f(0) = 0$. **(2p)**

Acum vom arăta prin reducere la absurd că $f(0) = 0$.

Presupunem $f(0) = a_1 \neq 0$ şi fie $n(0) = n$, din ipoteză rezultă $f^n(0) = 0$.

Facem notaţiile: $f(0) = a_1$, $f^2(0) = f(a_1) = a_2$, $f^3(0) = f(a_2) = a_3, \ldots$, $f^{n-1}(0) = f(a_{n-2}) = a_{n-1}$ şi $f^n(0) = f(a_{n-1}) = 0 \overset{not}{=} a_n$. **(1p)**

Avem

$$(a_1 - f(a_1)) + (a_2 - f(a_2)) + \ldots + (a_n - f(a_n)) = 0.$$

(2p)

Dacă una din paranteze este zero, atunci din $f(a_i) = a_i$ ca la început rezultă $a_i = 0$ şi $f(0) = 0$.

Dacă nici una din paranteze nu este zero, atunci există una strict pozitivă şi una strict negativă:

$$a_i - f(a_i) < 0 \text{ şi } a_j - f(a_j) > 0$$

şi cum funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - f(x)$ este continuă, există x între a_i şi a_j astfel ca $g(x) = 0$ echivalent cu $f(x) = x$ şi ca la început $x = 0$ şi $f(0) = 0$. **(2p)**