Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a XI-a

P1. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că $A \cdot A^t = I_n$. Să se demonstreze că $\left| \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} \right| \le n$.

26364, GM 7-8-9/1010

P2. Fie $a > 0$ un număr real şi fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul de numere reale definit prin relaţia de recurenţă

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, \ \ n \ge 1.$$

a) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{\ln n}}$.

Ovidiu Furdui

P3. Să se determine numerele naturale $n \ge 2$ pentru care există matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $(AB)^2 = 0_n$ şi $(BA)^2 \ne 0_n$.

Dan Bărbosu

P4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un număr natural $n(x)$ astfel ca $f^{n(x)}(x) = 0$. Să se arate că $f(0) = 0$. (S-a notat $f^k(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$.)

Vasile Pop

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.