Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a XII-a

P1. Fie $G = \big((0,\infty),\cdot\big)$ grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

a) Determinaţi grupul $(H,*)$ ştiind că funcţia $f : G \to H$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ este un izomorfism de grupuri.

b) Calculaţi $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{2012 \text{ ori}}$.

P2. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{1}{1+\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}dx.$$

P3. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{i+j}{i^2+j^2}.$$

P4. Fie $(M,\cdot)$ un monoid cu elementul netru 1. Prin definiţie, ordinul unui element $a \in M$ (notat $o(a)$) este cel mai mic element al mulţimii

$$A = \{k \in \mathbb{N}^* : a^k = 1\},$$

dacă $A \neq \emptyset$ şi $+\infty$ dacă $A = \emptyset$.

a) Demonstraţi că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$, are loc egalitatea $o(AB) = o(BA)$.

b) Demonstraţi că dacă a este un element inversabil al unui monoid M, atunci $o(ab) = o(ba)$, pentru oricare $b \in M$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

Soluţie P1. a) Funcţia f este continuă şi derivabilă pe $(0,\infty)$. Cum $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$, pentru orice $x\in(0,\infty)$, f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Dar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ şi ţinând seama de continuitatea şi monotonia funcţiei f, rezultă că $H=(-1,1)$. **(2p)**

Deoarece f este un izomorfism de grupuri şi f^{-1} este un izomorfism de grupuri şi deci $f^{-1}(x*y)=f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y)\Rightarrow x*y=f[f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y)]$, pentru oricare $x,y\in(-1,1)$. **(1p)**

Este uşor de observat că $f^{-1}:(-1,1)\to(0,\infty)$, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{1-x}$. **(1p)**

Acum, folosind definiţia lui f^{-1} se obţine: $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $x,y\in(-1,1)$.
Grupul căutat este $(H,*)$, cu $H=(-1,1)$, $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$. **(1p)**

b) $f^{-1}(x*x*\ldots*x)=f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(x)\cdot\ldots\cdot f^{-1}(x)$, pentru orice $x\in(-1,1)$. **(1p)**

Deci $x*x*\ldots*x=f\left[\left(f^{-1}(x)\right)^{2012}\right]=\dfrac{(x+1)^{2012}-(x-1)^{2012}}{(x+1)^{2012}+(x-1)^{2012}}$. **(1p)**

Soluţie P2. Folosind substituţia $\sqrt{x}=t$ se obţine
$I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\sin t+\cos t}dt.$ **(1p)**

Cu substituţia $t=\dfrac{\pi}{2}-u$, **(2p)**

integrala devine $I=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\sin u+\cos u}du.$ **(2p)**

Cu substituţia $tg\dfrac{u}{2}=v$ avem: $du=\dfrac{2dv}{1+v^2}$, $1+\cos u+\sin u=\dfrac{2(1+v)}{1+v^2}$, $u=0\Rightarrow v=0$ şi $u=\frac{\pi}{2}\Rightarrow v=1$. **(1p)**

Se obţine $I=\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. **(1p)**

Soluţie P3.
Aplicam lema Cesaro-Stolz si avem ca **(2p)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{i+j}{i^2+j^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1^2}+\frac{(n+1)+2}{(n+1)^2+2^2}+\cdots+\frac{(n+1)+n}{(n+1)^2+n^2}\right)+\frac{1}{n+1}(\mathbf{2p})$$

$$=\frac{2}{n+1}\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}+\frac{1+\frac{2}{n+1}}{1+\left(\frac{2}{n+1}\right)^2}+\cdots+\frac{1+\frac{n}{n+1}}{1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}\right)+\frac{1}{n+1}(\mathbf{2p})$$

$$=2\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}dx=2\left(\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\ln 2.(\mathbf{1p})$$

Am folosit faptul ca suma de mai sus este suma Riemann asociata functiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$, diviziunii $\Delta=\{0,\frac{1}{n+1},\ldots,\frac{n+1}{n+1}\}$ si sistemului de puncte intermediare $C=\{0,\frac{1}{n+1},\ldots,\frac{n}{n+1}\}$.

Soluţie P4. a) Arătăm că egalitatea $(AB)^k=I_n$, $k\in\mathbb{N}^*$ are loc dacă şi numai dacă $(BA)^k=I_n$. Întradevăr, dacă $(AB)^k=I_n$ atunci AB este inversabilă, de unde rezultă că şi BA este inversabilă. **(1p)**

Pe de altă parte $(AB)^k=I_n$ implică $(BA)^{k+1}=BA$, **(2p)**
de unde $(BA)^k=I_n$. Reciproca se demonstrează la fel. **(1p)**

b) Dacă $\varphi: M\to M'$ este un izomorfism de monoizi, atunci pentru orice element $x\in M$ are loc egalitatea $o(x)=o(\varphi(x))$. Întradevăr, au loc echivalenţele: $x^n=1\Leftrightarrow\varphi(x^n)=1'\Leftrightarrow(\varphi(x))^n=1'$. **(1p)**

Considerăm funcţia $f:M\to M$, $f(x)=a^{-1}xa$. **(1p)**

Se verifică imediat că f este un morfism bijectiv (adică un automorfism al lui M).În plus, pentru orice $b\in M$, $f(ab)=a^{-1}(ab)a=ab$. Dacă ab şi ba au acelaşi ordin. **(1p)**