Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
”Grigore Moisil”
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012

Barem - Clasa a VI-a

P1. Se descompune 784 în factori primi şi se obţine $784 = 2^4 \cdot 7^2$. Egalitatea devine $2^{4^z}(2^{2^x-4^z} + 2^{3^y-4^z} + 1) = 2^4 \cdot 7^2$. Distingem două cazuri:

caz I $2^{4^z} = 7^2$ şi $2^{2^x-4^z} + 2^{3^y-4^z} + 1 = 2^4$ caz în care $z \notin \mathbb{N}$
caz II $2^{4^z} = 2^4$ şi $2^{2^x-4^z} + 2^{3^y-4^z} + 1 = 7^2 \Rightarrow z = 1$............ **2 puncte**

Pentru $2^{4^z} = 2^4$ obţinem $z = 1$ şi $2^{2^x-4^z} + 2^{3^y-4^z} = 48 \Rightarrow 2^{2^x-4^z} + 2^{3^y-4^z} = 2^4 \cdot 3 \Rightarrow 2^4(2^{2^x-8} + 2^{3^y-8}) = 2^4 \cdot 3$,
de unde obţinem $2^{2^x-8} + 2^{3^y-8} = 3$. .... **2 puncte**
Deoarece 3 poate fi scris în $\mathbb{N}$ ca $2 + 1$ sau $1 + 2$ distingem subcazurile:
1) $2^{2^x-8} = 1$ şi $2^{3^y-8} = 2$
2) $2^{2^x-8} = 2$ şi $2^{3^y-8} = 1$... **1 punct**

In cazul 1) obţinem $x = 3$ şi $y = 2$........................... **1 punct**
In cazul 2) obţinem $x \notin \mathbb{N}$...................................... **1 punct**

P2. Din

$$\frac{\overline{abc}}{41} = \frac{\overline{bac}}{77} = \frac{\overline{cba}}{104} = k$$

se deduce că $0 < a \leq b \leq c \leq 9$ şi $k = \dfrac{a+b+c}{2}$. .... **1 punct**

Se obţine $\overline{abc} = \dfrac{41}{2}(a+b+c)$

$\overline{bca} = \dfrac{77}{2}(a+b+c)$

$\overline{cab} = \dfrac{104}{2}(a+b+c)$... **2 puncte**

A doua egalitate implică $\overline{bca}\ \vdots 11$, ceea ce implică $b + a = c$.
Deci $a + b + c = 2c$... **1 punct**
Atunci $\overline{abc} = 41c \Rightarrow 100a + 10b + c = 41c \Rightarrow 3a = c$

$\overline{bca} = 77c \Rightarrow 100b + 10c + a = 77c \Rightarrow b = 2a$
$\overline{cab} = 104c$
$\overline{ab} = 4c$.. **2 puncte**
Se obţin soluţiile 123, 246 şi 369............................... **1 punct**.

P3. a) Se demonstrează că în ΔMDN, AD este înălţime şi mediană. Deci ΔMDN este isoscel .... **3 puncte**
b) $\Delta AMB \equiv \Delta ANE$ pe baza cazului de congruenţă U.L.U. .... **3 puncte**

c) AD este bisectoare în triunghiul isoscel ΔBAE, deci $AD \perp BE$. **1 punct**

P4. Fie $P' \in (BC)$ cu $BP' \equiv NC$ (şi $CP' \equiv MB$) .... **1 punct**
$\Delta BP'M \equiv \Delta CNP' \Rightarrow MP' \equiv NP'$ .... **1 punct**
$MP' \equiv NP'$ şi $MP \equiv NP$, deci P' coincide cu P .... **2 puncte**
$60^0 = m(\measuredangle MPN) = 180^0 - m(\measuredangle MPB) - m(\measuredangle NPC)$ .... **1 punct**
$= 180^0 - m(\measuredangle MPB) - m(\measuredangle PMB)$ .... **1 punct**
$= m(\measuredangle MBP)$, deci ΔABC este echilateral .... **1 punct**