

Concursul Interjudețean de Matematică și Informatică
”Grigore Moisil”
Ediția a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a VII-a

P1. Pe o foaie de hârtie sunt scrise numerele

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, 4181, 6765, 10946, 17711$$

astfel ca fiecare număr, de la al doilea până la penultimul, este egal cu diferența celor două numere vecine ale sale (de exemplu $2 = 3 - 1$, $3 = 5 - 2$, $5 = 8 - 3$, $8 = 13 - 5$, $13 = 21 - 8$, ..., $6765 = 10946 - 4181$, $10946 = 17711 - 6765$). Folosind aceste numere, se definesc:

$$A = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 8} + \frac{8}{5 \cdot 13} + \frac{13}{8 \cdot 21} + \dots + \frac{6765}{4181 \cdot 10946} + \frac{10946}{6765 \cdot 17711}$$
$$B = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 13} + \frac{1}{8 \cdot 21} + \dots + \frac{1}{4181 \cdot 10946} + \frac{1}{6765 \cdot 17711}.$$

Demonstrați că $A + B < 2$.

P2. Fie

$$a_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, a_2 = \sqrt{3 + \sqrt{5}}, \dots, a_{1006} = \sqrt{1007 + \sqrt{2013}},$$

$$a_{1007} = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}, a_{1008} = -\sqrt{3 - \sqrt{5}}, \dots, a_{2012} = -\sqrt{1007 - \sqrt{2013}}.$$

a) Care din numerele $A = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2012}}{2012} \right)^{2012}$ și $B = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2012}$ este mai mare?

b) Care din numerele $C = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}}{2010} \right)^{2010}$ și $D = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2010}$ este mai mare?

P3. Fie triunghiul ΔABC , cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $m(\angle B) = 30^\circ$. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$, N este mijlocul segmentului $[BC]$ și se consideră punctele $P \in [BC]$, $Q \in [MN]$ astfel încât

$$\frac{PB}{PC} = 4 \cdot \frac{QM}{QN} + 3.$$

Să se demonstreze că ΔAPQ este echilateral.

P4. Fie M un punct în interiorul triunghiului ΔABC astfel încât $\angle ABM \equiv \angle ACM$. Dacă P și Q sunt proiecțiile lui M pe AB , respectiv AC și E este mijlocul lui $[BC]$, arătați că $[EP] \equiv [EQ]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.