Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a VIII-a

Barem de corectare.

P1. Prin calcul direct se obţine
$\left(\sqrt{x+1-\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-1+\sqrt{x+1}}\right)^2=2x+2\sqrt{x^2-x-2+2\sqrt{x+1}}.$ **(4p)**

Atunci
$\sqrt{x+1-\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-1+\sqrt{x+1}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x^2-x-2+2\sqrt{x+1}}},$ **(2p)**

de unde rezultă că $N=\frac{1}{\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$. **(1p)**

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a VIII-a

Barem de corectare.

P2.

Din $\dfrac{1}{[x]} + \dfrac{1}{\{x\}} = ax$ se obţine $\dfrac{[x] + \{x\}}{[x] \cdot \{x\}} = ax$ ceea ce implică $\dfrac{x}{[x] \cdot \{x\}} = ax$ (**2p**)

Rezultă $1 = a[x]\{x\}$ (**1p**)

Notăm $[x] = k \geq 1$, unde $k \in \mathbb{Z}$ (**1p**)

Se obţine $\{x\} = \frac{1}{ak}$ (**1p**)

Deci $x = k + \frac{1}{ak}$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ (**2p**)

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a VIII-a

Barem de corectare.

P3. a)
Din $ABCD$ pătrat cu $[AB] = 2a$ se ob tine $[AC] \equiv [BD] = 2a\sqrt{2}$.
Din $MM'||AA'$ rezultă $\frac{MM_1}{AA'} = \frac{MO}{AO} = \frac{4}{5}$. Se obţine $MM_1 = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$. (**1p**)
Din $NN'||BB'$ rezultă $\frac{NN_1}{BB'} = \frac{NO}{BO} = \frac{3}{5}$. Se obţine $MM_1 = \frac{3a\sqrt{2}}{5}$. (**1p**)
Din $PP'||CC'$ rezultă $\frac{PP_1}{CC'} = \frac{PO}{CO} = \frac{2}{5}$. Se obţine $MM_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{5}$. (**1p**)
Din $QQ'||DD'$ rezultă $\frac{QQ_1}{DD'} = \frac{QO}{DO} = \frac{1}{5}$. Se obţine $QQ_1 = \frac{a\sqrt{2}}{5}$. (**1p**)
b)
Fie d dreapta perpendiculară pe planul (A, B, C) cu $O \in d$. Considerăm punctele O_1 şi O_2 asfel încât $d \cap M_1P_1 = \{O_1\}$, iar $d \cap N_1Q_1 = \{O_2\}$. (**1p**)
În trapezul dreptunghic M_1MPP_1, se obţine $OO_1 = \frac{8a\sqrt{2}}{15}$.
În trapezul dreptunghic N_1NQQ_1, se obţine $OO_2 = \frac{3a\sqrt{2}}{10}$.
Cum punctele O_1 şi O_2 nu sunt situate la aceeaşi distanţă faţă de punctul O, rezultă că dreptele M_1P_1 şi N_1Q_1 nu sunt coplanare. Deci punctele M_1, N_1, P_1 şi Q_1 sunt necoplanare. (**2p**)

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a VIII-a

Barem de corectare.

P4.

$\mathcal{V}_{VMAB} = \mathcal{V}_{VMAD} \Longleftrightarrow \mathcal{V}_{VOAB} - \mathcal{V}_{MOAB} = \mathcal{V}_{VOAD} - \mathcal{V}_{MOAD}$ (**1p**)

$\frac{1}{3}|VO| \cdot \mathcal{A}_{OAB} - \frac{1}{3}|MO| \cdot \mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{3}|VO| \cdot \mathcal{A}_{OAD} - \frac{1}{3}|MO| \cdot \mathcal{A}_{OAD}$ (**2p**)

$\frac{1}{3}|VM| \cdot \mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{3}|VM| \cdot \mathcal{A}_{OAD} \Longleftrightarrow \mathcal{A}_{OAB} = \mathcal{A}_{OAD}$ (**1p**)

$d(B, AC) = d(D, AC)$ (**2p**)

$\frac{1}{2} \cdot d(B, AC) \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot d(D, AC) \cdot |AC| \Longleftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$ (**1p**)