Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a VIII-a

P1. Să se arate că numărul

$$N = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x - 2 + 2\sqrt{x+1}}}}{\sqrt{x + 1 - \sqrt{x+1}} + \sqrt{x - 1 + \sqrt{x+1}}}$$

este iraţional oricare ar fi $x \in [1, \infty)$.

P2. Fie $a > 1$ un număr real. Să se determine $x > 1$ pentru care

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = ax,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

P3. Se consideră prisma patrulateră regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 2a$ şi $AA' = a\sqrt{2}$, unde $a > 0$. Fie O punctul de intersecţie al dreptelor AC şi BD, iar punctele M, N, P, Q sunt astfel încât $M, P \in [AC]$, $N, Q \in [BD]$, iar $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{10}$, $\frac{BN}{BD} = \frac{1}{5}$, $\frac{CP}{CA} = \frac{3}{10}$ şi $\frac{DQ}{DB} = \frac{2}{5}$. Pe planul (A, B, C) se ridică perpendicularele MM_1, NN_1, PP_1, QQ_1 unde $M_1 \in A'O$, $N_1 \in B'O$, $P_1 \in C'O$, respectiv $Q_1 \in D'O$.

a) Să se determine lungimile segmentelor $[MM_1]$, $[NN_1]$, $[PP_1]$, respectiv $[QQ_1]$;

b) Să se arate că punctele M_1, N_1, P_1 şi Q_1 sunt necoplanare.

P4. Fie patrulaterul convex $ABCD$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Pe planul (A, B, C) se ridică o perpendiculară în punctul O, pe care se consideră un punct V şi $M \in (VO)$. Să se arate că piramidele $VMAB$ şi $VMAD$ au acelaşi volum dacă şi numai dacă triunghiurile ΔABC şi ΔADC sunt echivalente.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.