Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Barem - Clasa a IX-a

P1. Avem

$$f(x)=\sqrt{(x^4+2x^2+1)+(x^2+4x+4)}=\sqrt{(x+2)^2+(x^2+1)^2}=d((x,x^2),(-2,-1))$$
$$g(x)=\sqrt{(x^4-10x^2+25)+(x^2-2x+1)}=\sqrt{(x-1)^2+(x^2-5)^2}=d((x,x^2),(1,5))$$

Considerăm parabola $P:\ y=x^2$ şi notăm $M(x,x^2)\in P$, $A(-2,-1)$, $B(1,5)$. .... **1 punct**

Problema revine la a determina:

$$\min\{MA+MB \mid M\in P\} \text{ şi } \max\{MA-MB \mid M\in P\}.$$

.... **1 punct**

Considerăm dreapta $AB:\ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{6}\Leftrightarrow y=2x+3$, care intersectează parabola P în punctele C şi D: $x^2=2x+3\Rightarrow x_1=-1$, $x_2=3$, deci $C(-1,1)$, $D(3,9)$. .... **1 punct**

Avem:

$$MA+MB\geq AB=CA+CB=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}=\min\{f(x)+g(x)\}$$

.... **2 puncte**

Apoi:

$$MA-MB\leq AB=DA-DB=3\sqrt{5}$$

.... **2 puncte**

Observaţie. Minimul se realizează în $x_1=-1$ iar maximul se realizează în $x_2=3$ şi avem:

$$\min\{f(x)+g(x)\}=\max\{f(x)-g(x)\}.$$

P2. Să presupunem că există $n\in\mathbb{N}, n\leq 2$ astfel încât $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\in\mathbb{Q}$.. **1 punct**

Notăm $E(k)=(\sqrt[n]{a})^k+(\sqrt[n]{b})^k, k\in\mathbb{N}$. Atunci $E(1)\in\mathbb{Q}$.

În identitatea $x^{k+1}+y^{k+1}=(x+y)(x^k+y^k)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$, luând $x=\sqrt[n]{a}, y=\sqrt[n]{b}$ .... **3 puncte**

Obţinem $E(k+1)=E(1)\cdot E(k)-E(k-1), k\leq 2(*)$ .... **1 punct**

Ţinând cont de (*) şi $E(1)\in\mathbb{Q}$ prin inducţie matematică rezultă $E(m)\in\mathbb{Q}$ pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$. În parrticular pentru $m=n$ avem $E(n)\in\mathbb{Q}$, adică $a+b\in\mathbb{Q}$ ceea ce este fals .... **2 puncte**

Atunci presupunerea făcută este falsă, deci $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

P3. Relaţia devine

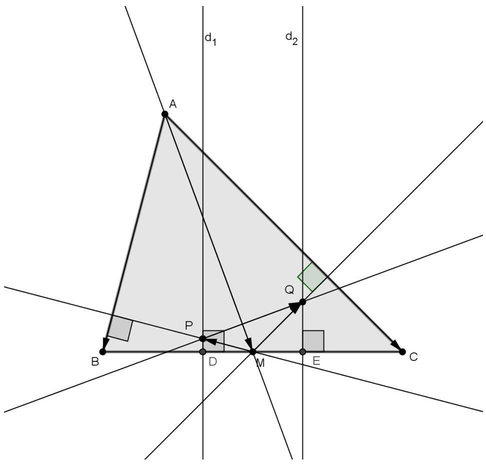
$AB\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MT})+BC\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NT}+CA\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PT})=\overrightarrow{0}$ (*) **1 punct**

$AB\cdot\overrightarrow{AM}=AM\cdot\overrightarrow{AB}, BC\cdot\overrightarrow{BN}=BN\cdot\overrightarrow{BC}$ şi $CA\cdot\overrightarrow{CP}=CP\cdot\overrightarrow{CA}$. **2 puncte**

Atunci $AB\cdot\overrightarrow{AM}+BC\cdot\overrightarrow{BN}+CA\cdot\overrightarrow{CP}=AM(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{0}$, deoarece $AM=BN=CP$ .... **1 punct**

Atunci relaţia (*) devine $AB\cdot \overrightarrow{MT} + BC\cdot \overrightarrow{NT} + CA\cdot \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{0}$ (**) . **1 punct**
Cum T este centru de greutate al ΔMNP, avem $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{0}$ (***)
1 punct
Din (**) şi (***) avem $(BC - AB)\cdot \overrightarrow{NT} + (CA - AB)\cdot \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{0}$ ... **1 punct**
$\overrightarrow{NT}$ şi $\overrightarrow{PT}$ sunt liniari independenţi, deci $BC = AB$, $CA = AB \Rightarrow AB = BC = CA \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral................................ **1 punct**

P4. Soluţie vectorială:



Avem:

$$AM \perp PQ \ \Leftrightarrow \ \vec{AM} \cdot \vec{PQ} = 0$$

Vom demonstra faptul că acest produs scalar este nul. Fără dificultate se observă că: $\vec{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)$, $\vec{PQ} = \vec{MQ} - \vec{MP}$............ **1 punct**
Vom avea:

$$\vec{AM} \cdot \vec{PQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right) \cdot \left(\vec{MQ} - \vec{MP}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{AB} \cdot \vec{MQ} + \underbrace{\vec{AC} \cdot \vec{MQ}}_{=0} - \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{MP}}_{=0} - \vec{AC} \cdot \vec{MP}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \vec{AM} \cdot \vec{PQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} \cdot \vec{MQ} - \vec{AC} \cdot \vec{MP}\right)$$

.... **2 puncte**
Am ţinut cont că avem: $MQ \perp AC \ \Leftrightarrow \ \vec{AC} \cdot \vec{MQ} = 0$ $MP \perp AB \ \Leftrightarrow \ \vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$... **1 punct**
Dar cum: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$; $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, vom obţine:

$$\vec{AM} \cdot \vec{PQ} = \frac{1}{2}\left[\left(\vec{AC} + \vec{CB}\right) \cdot \vec{MQ} - \left(\vec{AB} + \vec{BC}\right) \cdot \vec{MP}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\vec{AC} \cdot \vec{MQ}}_{=0} + \vec{CB} \cdot \vec{MQ} - \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{MP}}_{=0} - \vec{BC} \cdot \vec{MP}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{CB} \cdot \vec{MQ} - \vec{BC} \cdot \vec{MP}\right) = \frac{1}{2}\left[BC \cdot MQ \cdot \cos(\angle DMQ) - BC \cdot MP \cdot \cos\left(\angle PME\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \left[MQ \cdot \cos\left(180^\circ - m(\angle QME)\right) - MP \cdot \cos\left(180^\circ - m(\angle PMD)\right)\right] =$$

$= \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot [-MQ \cdot \cos(\angle QME) + MP \cdot \cos(\angle PMD)] = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot (-ME + MD) = 0$

Aşadar

$$\vec{AM} \cdot \vec{PQ} = 0 \Leftrightarrow AM \perp PQ$$

.... **3 puncte**.