Concursul judeţean interdisciplinar „Urmaşii lui Moisil”, ediţia a VII-a

5 februarie 2012

MATEMATICĂ - Clasa a VIII-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul	***Rezultatul***	***Punctajul***
1.	y$\in [-1, \frac{1}{5}]$	**4p**
2.	Intersecţia este formată din $\{0\}$	**2p**
3.	Se calculează $(1-\frac{1}{2})E$. Se obţine în final $E = 2 - \frac{1}{2^{255}}$	**2p**
4.	$\left.\begin{matrix}\sqrt{3}(2a-3b) \in \mathbb{Q} \\ a, b \in \mathbb{Q}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a - 3b = 0 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$	**3p**
5.	$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ Suma cerută este egală cu $1 - \frac{1}{2012!}$	**2p**
6.	$E(x) = -(x-\frac{5}{2})^2 + \frac{13}{4} \leq \frac{13}{4}$; Valoarea maximă a expresiei este $\frac{13}{4}$	**3p**
7.	$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 \Rightarrow n = 3$ (singura soluţie naturală) Există un singur triunghi care satisface cerinţa (triunghiul de laturi 3,4,5)	**3p**
8.	91°30’	**2p**
9.	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	**3p**
10.	$\overline{\underbrace{111\ldots11}_{2012}\underbrace{222\ldots22}_{2012}} = \overline{\underbrace{333\ldots33}_{2012}} \cdot \overline{\underbrace{333\ldots34}_{2012}}$	**2p**
11.	Fie $10^{n-1} < 2^{2012} < 10^n$ şi $10^{m-1} < 5^{2012} < 10^m$, unde n şi m reprezintă numărul cifrelor pentru 2^{2012} respectiv 5^{2012}. Obţinem astfel că $10^{n+m-2} < 2^{2012} \cdot 5^{2012} < 10^{n+m} \Rightarrow$ $10^{n+m-2} < 10^{2012} < 10^{n+m} \Rightarrow n + m - 2 < 2012 < n + m \Rightarrow$ $n + m = 2013$	**2p**
12.	$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2012} = 1$	**3p**
13.	$(h-1)^2 + (l-2)^2 + (L-3)^2 = h^2 + l^2 + L^2 + 1 + 4 + 9 - 2(h + 2l + 3L) = 10 + 1 + 4 + 9 - 2 \cdot 12 = 0 \Rightarrow h = 1, l = 2, L = 3 \Rightarrow$volumul paralelipipedului este V=1·2·3=6	**2p**
14.	1	**4p**
15.	$2^{n+1} \cdot (2n-3) + 6$	**2p**
16.	$\left.\begin{matrix}2^n = \overline{ua_1a_2\ldots a_k} \Rightarrow u \cdot 10^k < 2^n < (u+1) \cdot 10^k \\ 5^n = \overline{ub_1b_2\ldots b_m} \Rightarrow u \cdot 10^m < 5^n < (u+1) \cdot 10^m\end{matrix}\right\} \Rightarrow u^2 \cdot 10^{k+m} < 10^n <$ $(u+1)^2 \cdot 10^{k+m} \Rightarrow \left.\begin{matrix}u^2 < 10^{n-k-m} < (u+1)^2 \\ u \in \{1,2,3,\ldots,9\}\end{matrix}\right\} \Rightarrow n - k - m = 1 \Rightarrow$ $u^2 < 10 < (u+1)^2 \Rightarrow u = 3$. Aşadar u poate fi doar 3. (Exemplu	**2p**

	$2^5 = 32;\ 5^5 = 3125$)	
17.	Din inegalitatea Cauchy $(a^2 + b^2 + c^2)\left(1^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2\right) \geq \left(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 6(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3})^2$. Din ipoteză obţinem: $\frac{a}{1} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{3}} = k \Rightarrow a = k, b = \sqrt{2}k, c = \sqrt{3}k$. Triunghiurile sunt dreptunghice cu catete a=k,b=$\sqrt{2}k$ şi ipotenuza c=$\sqrt{3}k$ ($k \in \mathbb{R}_+^*$)	**2p**
18.	$3^9 = 19683$ moduri de colorare.	**3p**
19.	Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub de latură 1. ($ABCD$ şi $A_1B_1C_1D_1$ baza inferioară şi superioară). Un drum ce satisface cerinţa este de exemplu: $A \to A_1 \to D \to B \to B_1 \to C \to D_1 \to C_1$. Lungimea drumului cerut este $(3 + 4\sqrt{2})m$	**2p**
20.	Latura pătratului P_{2012} este egală cu $\frac{ah^{2012}}{(a+h)^{2012}}$	**2p**
TOTAL		**50p**