



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

CLASA a IX-a

- 1) Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC și G_A, G_B, G_C respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor MBC, MAC, MAB . Să se arate că $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \vec{0}$ dacă și numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC .

G.M.

- 2) a) Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ și $a + b + c = 16$. Arătați că:

$$\sqrt{ab + ac} + \sqrt{ab + bc} + \sqrt{ac + bc} \leq 24$$

- b) Determinați $\left[(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+5})^2 \right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .

- 3) Determinați cardinalul mulțimii:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n^2 + 7}{n^2 + n + 6}, n = \overline{1, 100} \right\}$$

- 4) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că :

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + x + \frac{2}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze suma $\sum_{k=2}^{2012} \frac{1}{f(k) - 2}$.

G.M.

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7