



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ȘI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ȘTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

CLASA a X-a

1. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ este rațional.
2. a) Să se găsească cea mai mare valoare a produsului $a \cdot b$ știind că $\log_{\frac{1}{2}} a \cdot \log_{\frac{1}{2}} b = 1$, $a, b \in (0, 1)$.
b) Dacă $a, b, c > 1$, să se arate că : $\left(\log_a \frac{b+c}{2}\right) \cdot \left(\log_b \frac{c+a}{2}\right) \cdot \left(\log_c \frac{a+b}{2}\right) \geq 1$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow [2, \infty)$, $f(x) = a^x + a^{-x}$ unde $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$.
a) Să se arate că f este surjectivă. Este f bijectivă ?
b) Să se arate că pentru $n \in \mathbf{N}^*$ dat avem $\sum_{k=1}^n f(kx) \geq 2n, \forall x \in \mathbf{R}$.
4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că:
a) $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = 3 \cdot (1 + |z|^2), \forall z \in \mathbf{C}$.
b) $|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| \geq 3, \forall z \in \mathbf{C}$.

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7