Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a V-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1. Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui $3 \cdot 2^{2009}$ la $5 \cdot 2^{2007}$.

***

Problema 2. Să se determine numărul natural a şi cifra b, dacă

$$(a+3) \cdot \overline{200b} = a \cdot 2009.$$

***

Problema 3. Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul

$$1! + 4! + 7! + \cdots + (3n+1)!$$

este pătrat perfect, unde am notat $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x$, $x \in \mathbb{N}^*$.

G.M. nr.6/2011

Problema 4. Notăm cu A cel mai mic număr natural de patru cifre distincte care este un cub perfect. Considerăm numerele $B = \overline{abc}$, $a > b > c$ alese astfel încât împărţind pe a la $b - c$, câtul şi restul sunt egale cu 2.

Găsiţi numerele B şi determinaţi toate perechile (A, B) pentru care suma dintre câtul şi restul împărţirii lui A la B este un număr divizibil cu 5.

Christina Dan

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 2 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VI-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1. Să se determine numărul natural nenul x ce satisface următoarea egalitate:

$$(400, x)^2 = [25, x] \cdot [16, x],$$

unde (a, b) şi $[a, b]$ reprezintă c.m.m.d.c-ul, respectiv c.m.m.m.c-ul, numerelor a şi b.

***

Problema 2. Fie a un număr natural astfel încât numerele $a + 2, a + 4, a + 8, a + 10, a + 16$ sunt simultan prime.

Arătaţi că $x = (a + 2)^n + (a + 4)^n - (a - 1)^n$ este divizibil cu 10, oricare ar fi n număr natural nenul.

GM 4/2011

Problema 3. Fie a un număr natural nenul cu următoarea proprietate:

oricare ar fi p un divizor prim al lui a rezultă $p + 1 \mid a$.

Să se determine cel mai mic şi cel mai mare număr natural de trei cifre cu proprietatea de mai sus.

***

Problema 4. Se consideră unghiurile adiacente şi suplementare $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$. În semiplanul delimitat de dreapta AC care conţine punctul B, se consideră punctele M şi N astfel încât $OM \perp OA$ şi $ON \perp OB$. Dacă $m(\widehat{CON}) = 3 \cdot m(\widehat{AOB})$, determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{CON}$, $\widehat{MON}$ şi $\widehat{BOM}$.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 2 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1.
Arătaţi că dacă x, y sunt numere naturale nenule astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2012}$, atunci $\sqrt{\left(\frac{x}{4} - 503\right) \cdot \left(\frac{y}{4} - 503\right)}$ este număr natural.

(S:E11.281, GM 11, 2011)

Problema 2.
Fie $a < 0$. Calculaţi valoarea expresiei $E(x) = |a + x| + \sqrt{(a-1)^2} - |2a| + x$, pentru $x < |a|$.

***

Problema 3.
Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) < 60°$, iar Q un punct în interiorul triunghiului, astfel încât $\triangle\ BCQ$ este echilateral. Ştiind că $BC = 4$ cm şi $AQ = 3$ cm, aflaţi aria triunghiului AQB.

(S:E11.245, GM 10, 2011)

Problema 4.
Fie M şi N respectiv mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[CD]$ ale paralelogramului ABCD. Notăm $[DM] \cap [AC] = \{G_1\}$ şi $[BN] \cap [AC] = \{G_2\}$. Arătaţi că:

a) $[AG_1] \equiv [G_1G_2] \equiv [G_2C]$.

b) G_1 este centrul de greutate al triunghiului AMN.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VIII-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1.

Arătaţi că numărul:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

este raţional.

***

Problema 2.

Rezolvaţi ecuaţia $1+[x] = [px]$, unde p este număr natural, iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

GM 7-8-9/2010

Problema 3.

In planul α se consideră $ABCD$ un dreptunghi, O intersecţia diagonalelor sale şi M un punct exterior planului α. Dacă

$$MA = MB = MC = MD,$$

demonstraţi că dreapta MO este perpendiculară pe planul α.

***

Problema 4.

Fie $ABCD$ un tetraedru, iar S un punct exterior acestuia. Arătaţi că dacă SE, SF, SG, SH sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ASB}$, $\widehat{BSC}$, $\widehat{CSD}$, respectiv $\widehat{DSA}$, ($E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$, $H \in DA$), atunci E, F, G şi H sunt coplanare.

***

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a IX-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1. Să se determine numerele naturale n pentru care:

$$[\sqrt{n}] + \left[\frac{n-2}{3}\right] + 1 = n.$$

(G. M. - B, Nr. 11/2011)

Problema 2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale. Aflaţi raţia acestei progresii ştiind că suma primilor 11 termeni este un număr de trei cifre şi că

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = 1800.$$

***

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater şi fie $k \in (0, \infty)$. Considerăm punctele M, N, P, Q astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$ şi $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD}$. Să se arate că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ.

(G. M. - B, Nr. 5/2011)

Problema 4. Fie $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $p \geq 2$. Pe latura BC a triunghiului oarecare ABC se consideră punctul D astfel încât $BC = pBD$. Pe segmentul AD se consideră $n-1$ puncte A_1, A_2, ..., A_{n-1} astfel încât $AA_i = \frac{i}{n}AD$, $i = 1, 2, ..., n-1$.

Cercetaţi dacă există i astfel încât dreapta BA_i să treacă prin mijlocul laturii AC.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1.
Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3^{2x+1} + 3^{2y+1} + 3^{2z+1} = 81 \\ \log_3(2x+1) + \log_3(2y+1) + \log_3(2z+1) = 3. \end{cases}$$

***

Problema 2.
Să se rezolve ecuaţiile:

a) $|z-a| + |z-b| = b-a$, $z \in \mathbb{C}$, unde a şi b sunt două numere reale fixate, cu $a < b$;

b) $|z| + |z-1| + |z-2| + |z-3| = 4$, $z \in \mathbb{C}$.

***

Problema 3.
Fie $a \in (0, \infty)$. Să se determine $x, y \in (0, \infty)$, astfel încât

$$\lg^2 \frac{x}{y} = 3 \lg \frac{x}{a} \lg \frac{a}{y}.$$

Gazeta Matematică

Problema 4.
Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cu proprietatea

$$f(z) + f(\varepsilon z) = \bar{z}^2 + f\left(\varepsilon^2 z\right), \ \forall z \in \mathbb{C},$$

unde ε este o rădăcină de ordinul 3 a unităţii, diferită de 1.

Cătălin Şterbeţi

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XI-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1.

(i) Se dă expresia $E(x,y) = \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{x+y}$, unde x şi y sunt numere reale pozitive. Fie $x_1 = -y + \sqrt{1+y^2}$. Arătaţi că $E(x,y) \geq E(x_1,y)$.
(ii) Folosind, eventual, punctul (i), să se demonstreze că

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq \frac{8}{\sqrt{27}} \cdot (x+y)\,, \forall x,y \geq 0\,.$$

(C.d.p.)

Problema 2.

(i) Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ date de $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ şi $b_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ pentru orice $n \geq 1$. Să se arate că

$$a_n + b_n \geq 1, \quad a_n + \frac{b_n}{a_{n-1}+b_{n-1}} \geq 1, \quad \text{unde } n \geq 2.$$

(ii) Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = 1$ şi $(n+1)x_{n+1} = 1 + \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{x_n}}$, $n \geq 1$. Demonstraţi, folosind, eventual, punctul (i), convergenţa şirului $(\sqrt{n} \cdot x_n)_{n\geq 1}$ şi calculaţi limita acestuia.

(C.d.p.)

Problema 3.

Fie A şi B două matrici pătratice de ordinul $n \geq 2$ cu elemente numere reale şi cu proprietatea că $A^2 + B^2 = O_n$. Să se arate că:
a) dacă $n = 4k$, $k \in \mathbf{N}$, atunci $\det(AB - BA) \geq 0$;
b) dacă $n = 4k+2$, $k \in \mathbf{N}$, atunci $\det(AB - BA) \leq 0$;
c) dacă $n = 4k+1$ sau $n = 4k+3$, $k \in \mathbf{N}$, atunci $\det(AB - BA) = 0$.

(G.M.)

Problema 4.

Fie matricile $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ astfel ca $\det A = \det B = \frac{1}{4} \cdot \det(A+B) \geq 0$.
Arătaţi că $\det(xA + yB) \geq 0$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.
Când are loc egalitatea?

(G.M.)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XII-a
Craiova, 18 februarie 2012

Problema 1.

Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Să se arate că dacă ecuaţia $z+z+z+z = \widehat{1}$ nu are soluţii in $\mathbb{Z}_n$ atunci ecuaţia $x+x = \widehat{1}$ nu are soluţii in $\mathbb{Z}_n$.

G. M. 26409

Problema 2.

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit de ordin impar şi H un subgrup al lui G de ordin 3. Ştiind că $xyx^{-1} \in H$ pentru orice $x \in G$ şi $y \in H$, să se arate că elementele lui H comută cu elementele lui G.

G. M. 26380

Problema 3.

Să se determine funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce satisface relaţia $F(x) = \frac{xf(x)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

***

Problema 4.

Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ şi F o primitivă a sa. Să se arate că are loc inegalitatea $F(e^n) < n + F(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.