Colegiul Național “Mircea cel Bătrân” Constanța

Concursul Național de Matematică “N. N. Mihăileanu”

Ediția a XIII-a, 5 aprilie 2012

Clasa a VII-a

Subiectul 1

Fie $a,b\in \mathbf{R}$, $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$ și $n\in \mathbf{N}^*$. Să se arate că $\dfrac{a^{2n}}{b^n+1}+\dfrac{b^{2n}}{a^n+1}\le 1$.

Viorica Frecuș, Constanța

Subiectul 2

Spunem că mulţimea A are proprietatea (P) dacă și numai dacă

$$(P): A\subset \mathbf{Z}^*,\ A\ne\varnothing \text{ și } \forall x\in A,\ \exists y,z\in A,\ y\ne z, \text{ astfel încât } x=y+z.$$

a) Daţi un exemplu de mulţime cu proprietatea (P), cu 2012 elemente.

b) Arătaţi că dacă mulţimea A are proprietatea (P), atunci A are cel puţin 6 elemente.

***

Subiectul 3

Fie $ABCD$ un dreptunghi, $AB>AD$. Dacă $AE\perp BD$, $E\in(DC)$ și $EF\parallel BD, F\in(AC)$, arătaţi că aria patrulaterului $ABFD$ verifică relaţia $\mathcal{A}_{ABFD}>AD^2$.

Florian Gache, Constanța

Subiectul 4

Considerăm triunghiul ABC cu măsurile unghiurilor BAC şi ABC de 70° şi respectiv 60°, iar I este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

a) Determinaţi poziţia punctului M situat pe semidreapta $(IC$ astfel încât există triunghiul MNP, unde $P\in(AI)$, $N\in(BI)$ şi punctul I este ortocentrul ΔMNP.

b) Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului MNP.

Artur Bălăucă, Iași

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.