



# Colegiul Național "Mircea cel Bătrân" Constanța

## Concursul Național de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediția a XIII-a, 5 aprilie 2012

### Clasa a VIII-a

#### Subiectul 1

Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația  $4^m - 3^n = p^2$ .

*Artur Bălăucă, Iași*

#### Subiectul 2

a) Fie  $x, y, z, a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $x \leq y \leq z$  și  $a \leq b \leq c$ . Demonstrați inegalitatea

$$3(xa + yb + zc) \geq (x + y + z)(a + b + c).$$

\*\*\*

b) Fie numerele reale  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ . Arătați că

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

*Constantin Caragea și Nelu Chichirim, Constanța*

#### Subiectul 3

Fie  $ABCD A' B' C' D'$  un cub cu muchia  $AB = a$ ,  $a > 0$  și punctele  $M \in (AB)$ ,  $AM = MB$ ,  $N \in (AD)$ ,  $AN = ND$ ,  $\{P\} = CM \cap BD$  și  $\{Q\} = A'D \cap D'N$ . Calculați  $d(D, (C'PQ))$ .

*Florian Gache, Constanța*

#### Subiectul 4

Fie  $VABC$  un tetraedru și punctele  $A_2, B_2, C_2$  pe medianele  $AA_1, BB_1$  și respectiv  $CC_1$  ale triunghiului  $ABC$ , cu proprietatea că  $\frac{AA_2}{AA_1} = \frac{BB_2}{BB_1} = \frac{CC_2}{CC_1}$ . Să se arate că are loc inegalitatea

$$VA_2 + VB_2 + VC_2 < VA + VB + VC.$$

*Marius Cavachi, Constanța*

**Notă.** Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.