Concursul Naţional Vrănceanu – Procopiu
Bacău, 19 noiembrie 2011

Sursa: www.matefbc.ro

Proba de baraj - Matematică

Problema 1. Fie ABC un triunghi care nu este nici echilateral, nici dreptunghic şi fie A', B' respectiv C' proiecţiile ortogonale ale punctelor A, B respectiv C pe dreptele BC, CA respectiv AB. Să se arate că dreptele Euler ale triunghiurilor $AB'C', BC'A'$ şi $CA'B'$ sunt concurente într-un punct situat pe cercul lui Euler al triunghiului ABC.

Soluţie.
Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC este chiar cercul circumscris al triunghiului $A'B'C'$ şi intersectează segmentele AH, BH, CH în punctele A'', B'' respectiv C'', deci triunghiurile ABC şi $A''B''C''$ sunt omotetice. Triunghiurile $AB'C', BC'A'$ şi $CA'B'$ sunt două câte două asemenea şi punctele A'', B'' respectiv C'' sunt centrele cercurilor circumscrise lor.
Notăm cu $e(A''), e(B'')$ respectiv $e(C'')$ dreptele Euler ale triunghiurilor $AB'C', BC'A'$ şi $CA'B'$. Dacă dreapta Euler a triunghiului ABC este paralelă cu o latură a acestuia, atunci $e(A''), e(B'')$ şi $e(C'')$ se întâlnesc pe una dintre înălţimile triunghiului $A''B''C''$. În caz contrar, notăm cu P punctul de intersecţie al dreptelor $e(A'')$ şi $e(B'')$. Datorită asemănării triunghiurilor $AB'C'$ şi $A'BC'$, unghiul pe care dreapta $e(A'')$ îl formează cu AB' (sau cu $A''C''$) este egal cu unghiul pe care dreapta $e(B'')$ îl formează cu $A'B$ (sau cu $B''C''$). Rezultă că, în triunghiul $A''PB''$, unghiul P este egal sau cu $A''C''B''$, sau cu suplementul său. Atunci P se află pe cercul circumscris triunghiului $A''B''C''$, care este cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC. Analog se arată că alte două drepte Euler dintre cele considerate se întâlnesc tot pe cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC. Dacă cele trei drepte Euler nu ar fi concurente, una dintre ele ar intersecta cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC în trei puncte distincte, ceea ce este imposibil.

Problema 2. Fie a un număr real mai mare sau egal cu 3 şi P un polinom cu coeficienţi reali. Să se arate că

$$\max\left\{\left|a^k - P(k)\right| \mid k = 0,1,2,\dots, grP+1\right\} \geq 1,$$

unde grP este gradul polinomului P.

Soluţie.
Folosim inducţia după grP. Dacă $grP = 0$, atunci $P = c$ este constant şi dacă afirmaţia din concluzie nu ar avea loc, atunci $|1-c| < 1$ şi $|a-c| < 1$, deci

$$|a-1| \leq |a-c| + |c-1| < 1+1 = 2,$$

Fapt care ar contrazice ipoteza $a \geq 3$.
Pentru $grP > 0$, notăm $M = \max\left\{\left|a^k - P(k)\right| \mid k = 0,1,2,...,grP+1\right\} \geq 1$ şi considerăm polinomul $Q(X) = \frac{1}{a-1}\left(P(X+1) - P(X)\right)$, având gradul strict mai mic decât *grP*.
Pentru $k = 0,1,2,...,grP$, avem că

$$\left|a^k - Q(k)\right| = \frac{1}{a-1}\left|a^{k+1} - a^k - P(k+1) - P(k)\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{a-1}\left(\left|a^{k+1} - P(k+1)\right| + \left|a^k - P(k)\right|\right) \leq \frac{2M}{a-1} \leq M.$$

Deoarece $grQ < grP$, putem aplica ipoteza de inducţie şi astfel soluţia este completă.

Problema 3. Să se arate că orice număr întreg *N* poate fi scris în mod unic sub forma $N = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^k$, unde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \{-1,0,1\}$ şi $a_k a_{k+1} = 0,\ k = 0,1,...,n-1$.

Soluţie.
Ar fi suficient să demonstrăm afirmaţia pentru numere *N* întregi pozitive. Considerăm scrierea (unică) în baza 2 a lui *N*

$$N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_r},\ 0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r. \tag{1}$$

Transformăm scrierea (1) utilizând, de cîte ori este posibil, una dintre egalităţile

$$2^t + 2^{t+1} = -2^t + 2^{t+2}, \quad 2^t - 2^{t+1} = -2^t, \quad 2^t + 2^t = 2^{t+1}.$$

În momentul în care transformările anterioare nu mai pot fi făcute, obţinem pentru *N* o descompunere de tipul

$$N = \sum_{a \in A} 2^a - \sum_{b \in B} 2^b,$$

unde *A* şi *B* sunt mulţimi finite disjuncte de numere naturale, a căror reuniune nu conţine numere întregi consecutive.
Pentru a demonstra unicitatea, fie $N = \sum_{c \in C} 2^c - \sum_{d \in D} 2^d$, unde *C* şi *D* sunt mulţimi finite disjuncte de numere naturale, a căror reuniune nu conţine numere întregi consecutive; atunci

$$\sum_{a \in A} 2^a + \sum_{d \in D} 2^d = \sum_{b \in B} 2^b + \sum_{c \in C} 2^c. \tag{2}$$

Dacă $x \in A \cap D$, înlocuim $2^x + 2^x$ cu 2^{x+1} în membrul stâng din (2). Întrucât $x+1$ se află în complementara lui $A \cup D$, aceste înlocuiri nu interferează una cu alta. Procedăm analog în membrul drept al lui (2), transformând această egalitate în

$$\sum_{x \in X} 2^x = \sum_{y \in Y} 2^y; \tag{3}$$

rezultă că $x = y$, din unicitatea scrierii în baza 2.
Vom arăta în continuare că $A = C$ şi $B = D$, de unde concluzia problemei. Evident, ar fi destul să demonstrăm că $A \subseteq C$. Considerăm $a \in A$ şi distingem două situaţii:

- Dacă $a \notin D$, atunci 2^a apare în membrul stâng al lui (3), deci trebuie să apară şi în membrul drept. Cum $a-1 \notin B$, 2^a în (3) nu poate fi sumă de tipul $2^{a-1} + 2^{a-1}$, deci 2^a trebuie să apară şi în membrul drept din (2). Cum A şi B sunt disjuncte, rezultă că $a \in C$.

- Dacă $a \in D$, atunci 2^{a+1} apare în membrul stâng al lui (3), deci trebuie să apară şi în membrul drept. Cum $a \in A \bigcap D$, rezultă că $a+1 \in B \bigcap C$. Atunci 2^{a+1} din membrul drept al lui (3) trebuie să fie sumă dintre 2^a din $\sum_{b \in B} 2^b$ şi 2^a din $\sum_{c \in C} 2^c$, adică $a \in C$.

Problema 4. Un număr natural nenul N se numeşte *abundent* dacă suma tuturor divizorilor săi pozitivi este strict mai mare decât $2N$. Să se arate că, oricare ar fi numărul natural nenul *n*, există *n* numere abundente consecutive.

Soluţie.

Fie p_k al *k*-lea număr prim, $k = 1, 2, 3, \ldots$ şi, amintindu-ne că $\prod_k \left(1+\frac{1}{p_k}\right) = \infty$, rezultă că pentru orice număr natural nenul *m*, există un întreg $N(m) \geq m$ astfel încât $\prod_{k=m}^{N(m)} \left(1+\frac{1}{p_k}\right) > 2$, deci $\prod_{k=m}^{N(m)} p_k$ este abundent.

Apoi, fie $m_1 = 1$ şi $m_{j+1} = N(m_j)+1,\ j = 1, 2, 3, \ldots$, iar $M_j = \prod_{k=m_j}^{N(m_j)} p_k,\ j = 1, 2, 3, \ldots$.

Evident, numerele M_j sunt două câte două prime între ele, deci vom putea alege un număr natural M astfel încât $M + j \equiv 0 \left(\operatorname{mod} M_j\right),\ j = 1, 2, \ldots, n$. Întrucât orice multiplu a unui număr abundent este abundent, rezultă că $M+1, M+2, \ldots, M+n$ sunt *n* numere consecutive abundente.

Sursa www.matefbc.ro