Colegiul Național "Mircea cel Bătrân" Constanța

Concursul Național de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediția a XIII-a, 5 aprilie 2012

Clasa a X-a

Subiectul 1

Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $2\log_3 \frac{a+b+c}{3} - 3\log_3 \sqrt[3]{abc} + 2 = 0$. Aflaţi valoarea maximă a expresiei

$$\frac{1}{\sqrt{81+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{81+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{81+c^2}}$$

Gabriela Constantinescu, Constanța

Subiectul 2

Să se determine funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică relaţia:

$$f(x) - f(y) = (x-y)g(x+y),\ \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 3

Fie ε_k, $k = \overline{0, n-1}$, rădăcinile de ordinul n ale unităţii. Să se determine mulţimea valorilor pe care le poate lua produsul $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\varepsilon_k + \frac{1}{\varepsilon_k} - 1 \right)$.

Gheorghe Andrei, Constanța

Subiectul 4

Fie M un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC. Notăm cu M_1, M_2, M_3 simetricele punctului M faţă de laturile BC, AC respectiv AB şi fie P_1, P_2, P_3 mijloacele segmentelor $[AM_1], [BM_2], [CM_3]$. Arătaţi că triunghiul $P_1P_2P_3$ este echilateral.

***

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.