



Colegiul Național "Mircea cel Bătrân" Constanța

Concursul Național de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediția a XIII-a, 5 aprilie 2012

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie $A \in M_3(\mathbf{Z})$ cu proprietatea că $\det(A^2 + 3A + 2I_3)$ este un număr impar. Să se arate că matricea $A + qI_3$ este inversabilă pentru orice $q \in \mathbf{Q}$.

Cătălin Zîrnă, Constanța

Subiectul 2

Fie $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, f monotonă, g continuă și $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă $[g(x)f(x) - g(y)f(y)] \cdot [g(y)f(x) - g(x)f(y)] \leq 0, \forall x, y \in \mathbf{R}$, atunci f este continuă.

Gheorghe Andrei, Constanța

Subiectul 3

Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție care verifică relația

$$(1) \quad f(x+1) \cdot f(x) - f(x+1) + 1 = 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

- Să se arate că f nu este continuă.
- Să se arate că f este periodică.
- Să se determine toate funcțiile care verifică relația (1).

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 4

Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că există o funcție $g : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ cu $|g(x)| < |x|, \forall x \in \mathbf{R}^*$ și $f(g(x)) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}^*$.

- Dați exemplu de funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ discontinuă în orice punct din \mathbf{R} care verifică ipoteza. Justificați răspunsul.
- Dacă f este continuă, arătați că f este constantă.

Nelu Chichirim, Constanța

Notă. Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.