Colegiul Național “Mircea cel Bătrân” Constanța

Concursul Național de Matematică “N. N. Mihăileanu”

Ediția a XIII-a, 5 aprilie 2012

Clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie $P \in \mathbf{Z}\left[X\right]$ astfel încât ecuaţia $P(x)=2$ să aibă exact trei soluţii întregi distincte. Notăm cu n numărul soluţiilor întregi distincte ale ecuaţiei $P(x)=5$.

a) Demonstraţi că $n \le 2$.
b) Daţi exemplu de un polinom P, de grad 4, ce verifică ipoteza și pentru care $n=2$.
c) Există un polinom P, de grad 3, ce verifică ipoteza și pentru care $n=2$? Argumentaţi răspunsul.

Laurențiu Homentcovschi, Constanța

Subiectul 2

Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$ și p număr prim.

a) Arătaţi că există $s \in \mathbf{N}^*$ astfel încât pentru orice matrice $X \in M_n\left(\mathbf{Z}\right)$ cu p **nu divide** $\det X$, să avem p divide toate elementele matricei $X^s - I_n$.

b) Dacă $A \in M_n\left(\mathbf{Z}\right)$ este o matrice inversabilă cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$, ecuaţia $X^k = A$ are soluţii în $M_n\left(\mathbf{Z}\right)$, atunci $A = I_n$.

Marius Cavachi, Constanța

Subiectul 3

Fie $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă. Să se arate că există funcţiile $u,v,w:[a,b] \to \mathbf{R}$ astfel ca:

1) $f = uv + w$;
2) $\int_a^b u(x)dx = \int_a^b v(x)dx = \int_a^b w(x)dx = 0$.

Ioan Rașa, Vasile Pop; Cluj-Napoca

Subiectul 4

Fie $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă Riemann cu proprietatea că există $\alpha \in \left(0,\,1\right)$ şi $g:[0,1] \to [0,1]$ cu $\left|g(x)-g(y)\right| \le \left|x-y\right|$, $\forall x,y \in [0,1]$ astfel încât $f(x) = \int\limits_{g(\alpha)}^{g(x)} f(t)dt$, $\forall x \in [0,1]$.

Arătaţi că $f(x)=0,\ \forall x \in [0,\,1]$.

Nelu Chichirim, Constanța

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.