## CLASA A X-A – SOLUŢII ŞI BAREME

**1.** Arătaţi că pentru orice număr natural nenul $n$ există o mulţime de numere complexe $A_n$, având $n$ elemente, astfel încât corespondenţa $x \to f(x) = x^2$ să definească o funcţie bijectivă $f : A_n \to A_n$.

*Soluţie.* Dacă $n$ este impar putem lua $A_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$. **3p**

În acest caz funcţia este corect definită (căci $z^n = 1 \Rightarrow z^{2n} = 1$) şi injectivă (căci $z^2 = t^2$ şi $z \neq t$ implică $t = -z$, de unde $t^n = -1$ – contradicţie). Cum mulţimea este finită, funcţia este şi bijectivă. **2p**

Dacă $n$ este par putem lua $A_n = A_{n-1} \cup \{0\}$. **2p**

**2.** Aflaţi $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care mulţimea soluţiilor ecuaţiei $a \sin x + \sin 3x + b \sin 5x + c \sin 7x = 0$ este $\{k\pi/4 | k \in \mathbb{Z}\}$.

Laurenţiu Panaitopol

*Soluţie.* Ecuaţia trebuie să aibă soluţia $\pi/4$ şi soluţia $\pi/2$, deci $a + 1 - b - c = 0$ şi $a - 1 + b - c = 0$, de unde $a = c$ şi $b = 1$. **2p**

Ecuaţia se scrie $\sin 4x(\cos x + a \cos 3x) = 0$, sau $\cos x \sin 4x(4a \cos^2 x - 3a + 1) = 0$. **1p**

Cerinţa se realizează dacă şi numai dacă ecuaţia $4a \cos^2 x - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow 2a \cos 2x = a - 1$ nu are soluţii, sau are soluţiile tot de forma dată. **1p**

Prima variantă se realizează dacă $a = 0$ sau $\frac{a-1}{2a} \notin [-1, 1]$. **1p**

A doua variantă se realizează când ecuaţia duce la $\cos 2x = 0$ sau la $\cos 2x = \pm 1$. **1p**

Obţinem în final $c = a \in \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup \{1\},\ b = 1$. **1p**

**3.** Considerăm un număr real $a > 0, a \neq 1$.

a) Arătaţi că şirul $\left(\dfrac{a^n - 1}{n}\right)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

b) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{x}$ este injectivă.

*Soluţie.* a) Avem de arătat că $\dfrac{a^{n+1} - 1}{n + 1} > \dfrac{a^n - 1}{n}$, **1p**

adică $(a - 1)^2(1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}) > 0$ – evident. **2p**

b) Arătăm că funcţia este strict crescătoare. **1p**

Dacă $x_1 > x_2$ sunt numere raţionale pozitive, atunci există $m > n$ şi $p$, numere naturale nenule, astfel încât $x_1 = \dfrac{m}{p}, x_2 = \dfrac{n}{p}$. Fie $b = \sqrt[p]{a}$. Atunci, conform a),

$$f(x_1) = p\frac{b^m - 1}{m} > p\frac{b^n - 1}{n} = f(x_2). \quad \textbf{3p}$$

**4.** Aflaţi toate perechile $(a, b)$ de numere naturale pentru care numărul $3^a + 7^b$ este pătrat perfect.

*Soluţie.* Dacă $b = 0$, atunci $3^a = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ implică $n - 1$ şi $n + 1$ puteri ale lui 3; cum difeerenţa lor este 2, aceasta se poate dacă şi numai dacă $a = 1$. Obţinem soluţia $a = 1, b = 0$. **1p**

Dacă $b \geq 1$, deoarece pătratele perfecte dau resturile 1,2 sau 4 (mod 7), trebuie ca restul lui $3^a$ (mod 7) să fie unul dintre aceste numere, ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă $a$ este par. **2p**

Condiţia devine $7^b = (x - 3^c)(x + 3^c), x, c \in \mathbb{N}^*$, deci parantezele sunt puteri ale lui 7, de unde $2 \cdot 3^c = 7^d - 7^e, d, e \in \mathbb{N}$. Aceasta nu este posibil decât dacă $e = 0$ şi $3^{c-1} = 7^{d-1} + 7^{d-2} + \ldots + 1$. Pentru $c > 1$, analizând ultima relaţie (mod 3) rezultă $d = 3f, f \in \mathbb{N}^*$, de unde $2 \cdot 3^c = (7^f - 1)(7^{2f} + 7^f + 1)$, ceea ce conduce la $7^f - 1 = 2 \cdot 3^g, 7^{2f} + 7^f + 1 = 3^h, g, h \in \mathbb{N}$. Obţinem egalitatea $4 \cdot 3^{2g} + 6 \cdot 3^g + 3 = 3^h$, care nu este posibilă decât pentru $h = 1$ (deoarece membrul stâng este divizibil cu 3, dar nu cu $3^2$). Deducem $f = 0$, ceea ce nu convine. **3p**

Rămâne cazul $c = 1$, de unde $d = 1$, ceea ce conduce la soluţia $a = 2, b = 1$. **1p**