



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

CLASA a X-a

Problema 1. Să se rezolve ecuația:

$$2^{\sin^4 x - \cos^2 x} - 2^{\cos^4 x - \sin^2 x} = \cos 2x.$$

Problema 2. Se consideră numerele complexe distincte a, b, c, d . Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ are loc inegalitatea $|z - a| + |z - b| \geq |z - c| + |z - d|$;
- ii) Există $t \in (0, 1)$ astfel încât $c = ta + (1 - t)b$ și $d = (1 - t)a + tb$.

Problema 3. Să se determine toate funcțiile injective $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care satisfac relația

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 4. a) Să se arate că

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} < m,$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie p_1, p_2, \dots, p_n numerele prime mai mici decât 2^{100} . Să se arate că

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 10.$$

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.