Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

Clasa a XI-a

1. Fie matricele $A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n,1}(\mathbb{R}), C \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ și $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel incât $\lambda \cdot I_n - A$ să fie inversabilă. Calculați $C(\lambda \cdot I_n - A)^{-1}B$, știind că

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & -n+1 & -n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1\ 2\ 3\ 4 \dots n-1\ \ n+\lambda).$$

Student Radu-Constantin Poenaru, Râmnicu-Vâlcea

2. Dacă $A_i \in M_2(\mathbb{R}), i = \overline{1,3},\ M = \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, arătați că

$$\sum_{i-1}^{3} [\det(A_i^4 + M) + \det(A_i^4 - M)] \geq 2 \cdot \left(\prod_{I=1}^{3} \det(A_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{3} \det(A_i)\right).$$

Prof. Irinel Dafincescu, Râmnicu-Vâlcea

3. Fie $a, b \geq 0$ si considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$x_0 \geq 0 \ si\ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + ax_n + bx_n}{1+a+b}, n \geq 0.$$

Studiați natura șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ și precizați limita sa în caz de convergență.

Prof. dr. Univ. Dumitru Acu, Sibiu

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă astfel incât

$$f(2013x) - f(2013x - 1) = f(x+1) - f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calculați a) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x}$, b) $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n^2}$.

Prof. Irinel Dafincescu, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.