Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

Clasa a XI-a

1. Fie matricele $A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n,1}(\mathbb{R}), C \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ și $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel incât $\lambda \cdot I_n - A$ să fie inversabilă. Calculați $C(\lambda \cdot I_n - A)^{-1}B$, știind că

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & -n+1 & -n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1\ 2\ 3\ 4 \dots n-1\ \ n+\lambda).$$

Student Radu-Constantin Poenaru, Râmnicu-Vâlcea

Barem de corectare si notare

Construim matricea P = $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \dots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathbf{2p})$

și deducem

$$(\lambda \cdot I_n - A)P = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & \lambda+n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \dots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = d \cdot B,$$

unde $d = \det(\lambda I_n - A) = 1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \dots + n\lambda^{n-1} + \lambda^n \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (\mathbf{3p})$

$$\Rightarrow \frac{1}{d}P = (\lambda I_n - A)^{-1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(\lambda I_n - A)^{-1}B = \frac{1}{d}CP = \frac{1}{1+2\lambda+3\lambda^2+\dots+n\lambda^{n-1}+\lambda^n} \cdot (1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \dots + n\lambda^{n-1} + \lambda^n) = (1)$$

(2p)

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

Clasa a XI-a

2. Dacă $A_i \in M_2(\mathbb{R}), i = \overline{1,3},\ M = \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, arătați că

$$\sum_{i-1}^{3}[\det(A_i^4 + M) + \det(A_i^4 - M)] \geq 2 \cdot \left(\prod_{I=1}^{3} \det(A_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{3} \det(A_i)\right).$$

Prof. Irinel Dafincescu, Râmnicu-Vâlcea

Barem de corectare si notare

Fie A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Obținem det(A + M) + det(A - M) = 2 det(A) ………… …………… …...**(1p)**

$\Longrightarrow$ det(A_i^4+ M) + det(A_i^4- M) = 2 det(A_i^4) = 2 $(\det(A_i))^4$, $i = \overline{1,3}$. ....**(1p)**

Notăm $\det(A_1) = x, \det(A_2) = y, \det(A_3) = z$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … ….**(1p)**

Inegalitatea cerută este echivalentă cu

$$2\sum_{i-1}^{3}(\det(A_i))^4 \geq 2 \cdot \left(\prod_{I=1}^{3} \det(A_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{3} \det(A_i)\right) \Leftrightarrow\ x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z)(\mathbf{1p})$$

ceea ce este adevărat deoarece

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 + (y^2)^2 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq$$

$\geq xyyz + yzzx + zxxy = xyz(x + y + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .... **(3p)**

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

Clasa a XI-a

3. Fie $a, b \geq 0$ si considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$x_0 \geq 0 \ si \ x_{n+1} = \frac{x_n^2+ax_n+bx_n}{1+a+b}, n \geq 0.$$

Studiați natura șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ și precizați limita sa în caz de convergență.

Prof. dr. Univ. Dumitru Acu, Sibiu

Barem de corectare si notare

- $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = 0, n \geq 0$ si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$
- $x_0 = 1 \Rightarrow x_n = 1, n \geq 0$ (inducție matematică) și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ … ..**(1p)**
- $x_0 \in (0,1) \Rightarrow x_n \in (0,1), n \geq 0$ (inducție matematică) și

$$x_{n+1} = x_n \frac{x_n + a + b}{1 + a + b} < x_n \frac{1 + a + b}{1 + a + b} = x_n, n \geq 0 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0} \text{ s.}\downarrow.$$

Deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ și trecând la limită în relația de recurență obținem $l = \frac{l^2+al+bl}{1+a+b} \Rightarrow l^2 = l \Rightarrow l = 1$ sau $l = 0$

Cum $x_n \in (0,1), n \geq 0$ si $(x_n)_{n\geq 0}$ s.$\downarrow \Rightarrow l = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ … … … ..**(3p)**

- $x_0 > 1 \Rightarrow x_n > 1, n \geq 0$ (inducție matematică) și

$$x_{n+1} = x_n \frac{x_n + a + b}{1 + a + b} > x_n \frac{1 + a + b}{1 + a + b} = x_n, n \geq 0 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0} \text{ s.}\uparrow.$$

Presupunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ si trecând la limită în relația de recurență obținem

$l = 1$ sau $l = 0$, dar cum $x_n > 1$ și $(x_n)_{n\geq 0}$ s.$\uparrow$

nici una dintre aceste valori nu poate fi limita șirului $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ este divergent și deci $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ … **(3p)**

In concluzie, $x_0 \in [0,1] \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ este convergent și $x_0 > 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ este divergent.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a X-a, 23 februarie 2013

Clasa a XI-a

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel incât

$$f(2013x)-f(2013x-1)=f(x+1)-f(x),\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Calculați a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}$.

Prof. Irinel Dafincescu, Râmnicu-Vâlcea

Barem de corectare si notare

a) Notăm $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x+1)-f(x)=f(2013x)-f(2013x-1)\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\ g(x)=g(2013x-1),\forall x\in\mathbb{R}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(\mathbf{1p})$

Dacă y=2013x-1 $\Longrightarrow x=\frac{y+1}{2013}\Longrightarrow g(y)=\ g\left(\frac{y+1}{2013}\right)=\ g\left(\frac{\frac{y+1}{2013}+1}{2013}\right)=\ g\left(\frac{y+1+2013}{2013^2}\right)=$

$g\left(\frac{\frac{y+1}{2013}+1+2013}{2013^2}\right)=\ g\left(\frac{y+1+2013+2013^2}{2013^3}\right)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$ **(2p)**

Se demonstrează prin inducție că P(n): $g(y)=\ g\left(\frac{y+1+2013+\ldots+2013^{n-1}}{2013^n}\right),\ \forall n\geq 1$ …**(1p)**

Se trece la limită în relația $g(y)=\ g\left(\frac{y}{2013^n}+\frac{2013^n-1}{2012\cdot 2013^n}\right)$, ținând cont ca g este funcție continuă și obținem

$\lim_{n\to\infty}g(y)=g\left(\frac{1}{2012}\right)\Longrightarrow\ g(y)=c\,,\forall y\in\mathbb{R},\text{unde } c\in\mathbb{R}\ \Longrightarrow f(x+1)-f(x)=c\,,\forall x\in\mathbb{R}\Longrightarrow$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x}\ =0\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **(2p)**

b) $\begin{cases} f(2)-f(1)=c\\ f(3)-f(2)=c\\ \quad\dots\\ f(n)-f(n-1)=c\end{cases}\Longrightarrow f(n)=c\cdot(n\text{-}1)+f(1)\ \Longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=0\dots\dots\dots\dots\dots$**(1p)**