Societatea de Ştiinţe Matematice din România   Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Braşov, 2 aprilie 2013

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie A o matrice neinversabilă de ordin n cu elemente reale, $n \geq 2$, şi fie A^* adjuncta matricei A. Arătaţi că $\operatorname{tr}(A^*) \neq -1$ dacă şi numai dacă matricea $I_n + A^*$ este inversabilă.

Problema 2. Fie m şi n numere naturale, $m,\ n \geq 2$. Considerăm matricele $A_1,\ A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nu toate nilpotente. Demonstraţi că există un număr întreg $k > 0$ astfel încât $A_1^k + A_2^k + \cdots + A_m^k \neq O_n$.

Notă: Numim nilpotentă o matrice pătratică având o putere nulă.

Problema 3. O funcţie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ se numeşte *contractibilă* dacă, pentru orice numere $x, y \in (0, \infty)$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} (f^n(x) - f^n(y)) = 0$, unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}$.

a) Considerăm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie contractibilă, continuă, cu proprietatea că are un punct fix, adică există $x_0 \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x_0) = x_0$. Arătaţi că $f(x) > x$, oricare ar fi $x \in (0, x_0)$ şi $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in (x_0, \infty)$.

b) Arătaţi că funcţia $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dată prin $f(x) = x + \frac{1}{x}$ este contractibilă, dar nu are puncte fixe.

Problema 4. a) Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie derivabilă şi convexă. Arătaţi că dacă $f(x) \leq x$, oricare ar fi $x \geq 0$, atunci $f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

b) Determinaţi funcţiile $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ derivabile şi convexe care au proprietatea că $f(0) = 0$ şi $f'(x) \cdot f(f(x)) = x$, oricare ar fi $x \geq 0$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.