CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a X-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 9 - 11. 11. 2012

CLASA a X – a

1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte,cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, |kz_1 - z_2 - z_3| = |kz_2 - z_1 - z_3| = |kz_3 - z_1 - z_2|$, $k \in \mathbb{R} / \{-1\}$, atunci $z_1 + z_2 + z_3 = 0.$

Gheorghe Alexe, Brăila

***Soluţie*:**

Fie $z = z_1 + z_2 + z_3 \Rightarrow |kz_1 - z_2 - z_3| = |(k+1)z_1 - z| = |(k+1)z_2 - z| = |(k+1)z_3 - z|$. Ridicăm relaţia la pătrat şiobţinem $|(k+1)z_1 - z|^2 = |(k+1)z_2 - z|^2 = |(k+1)z_3 - z|^2 \Rightarrow \left[(k+1)z_1 - z\right]\left[(k+1)\overline{z_1} - \overline{z}\right] =$

$= \left[(k+1)z_2 - z\right]\left[(k+1)\overline{z_2} - \overline{z}\right] = \left[(k+1)z_3 - z\right]\left[(k+1)\overline{z_3} - \overline{z}\right] \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{z}{z_1 z_2}$ şi $\overline{z} = \dfrac{z}{z_2 z_3} \Rightarrow \dfrac{z}{z_1 z_2} = \dfrac{z}{z_2 z_3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z \cdot z_3 = z \cdot z_1 \Rightarrow z \cdot \underbrace{(z_3 - z_1)}_{\neq 0} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0.$

2. Fie $x, y, z > 1$ numere reale. Demonstraţi inegalitatea:

$$\log_{yz^2} x + \log_{zx^2} y + \log_{xy^2} z \geq 1.$$

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluţie*:**

Scriem relaţia echivalentă $\dfrac{\lg x}{\lg y + 2\lg z} + \dfrac{\lg y}{\lg z + 2\lg x} + \dfrac{\lg z}{\lg x + 2\lg y} \geq 1$. Notăm $\lg x = a, \lg y = b, \lg z = c.$

Inegalitatea devine $\dfrac{a}{b+2c} + \dfrac{b}{c+2a} + \dfrac{c}{a+2b} \geq 1$. Din inegalitatea lui Bergstrom avem $\dfrac{a}{b+2c} + \dfrac{b}{c+2a} +$

$+ \dfrac{c}{a+2b} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc+2(ab+ac+bc)} \geq 1,$ deoarece $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$

3. Fie $A_k = \left\{ \sqrt[k]{n+1} + \sqrt[k]{8n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, k \geq 2.$ Arătaţi că :

a) $A_2 \cap (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ este mulţime infinită.

b) $A_3 \cap \mathbb{Q} = \{2\}$.

c) $A_2 \cap \mathbb{Q}$ este mulţime infinită.

Dan Negulescu, Brăila, Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

***Soluţie*:**

a) Considerăm, de exemplu $n=10^{2a}-1, a\in\mathbb{N}^*$ şi obţinem

$\sqrt{n+1}+\sqrt{8n+1}=10^a+\sqrt{8\cdot 10^{2a}-7}\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \forall a\geq 1$ deoarece $8\cdot 10^{2a}-7$ are ultima cifră 3,deci nu este pătrat perfect.

b) Pentru $n=0\Rightarrow 2\in A_3$. Presupunem că există $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{8n+1}$ este raţional şi atunci $\sqrt[3]{n+1}, \sqrt[3]{8n+1}\in\mathbb{Q}$ şi cum $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\sqrt[3]{n+1}=x\in\mathbb{N}^*$ şi $\sqrt[3]{8n+1}=y\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n+1=x^3$ şi $8n+1=y^3\Rightarrow 8x^3-y^3=7$ cu $x,y>2\Rightarrow(2x-y)\left(4x^2+2xy+y^2\right)=7\Rightarrow 2x-y=1$ şi $4x^2+2xy+y^2=7\Rightarrow$ $\Rightarrow 6xy=6\Rightarrow xy=1,$ imposibil. Deci $\sqrt{n+1}+\sqrt{8n+1}\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \forall n\geq 1.$

c) Fie $\sqrt{n+1}=u\in\mathbb{N}$ şi $\sqrt{8n+1}=t\in\mathbb{N}\Rightarrow t^2-8u^2=-7$ cu soluţia $t=u=1.$ Ataşăm ecuaţia $a^2-8b^2=1$ (ecuaţie Pell) $a,b\in\mathbb{N}$ care admite soluţia minimală $a=3, b=1.$

Există şirurile $(a_n)_n, (b_n)_n$ de numere naturale astfel încât $\left(3\pm\sqrt{8}\right)^n=a_n\pm b_n\sqrt{8}, \forall n\geq 1.$ Într-adevăr $a_1=3, b_1=1$ şi $a_{n+1}\pm b_{n+1}\sqrt{8}=\left(3\pm\sqrt{8}\right)^{n+1}=\left(a_n\pm b_n\sqrt{8}\right)\left(3\pm\sqrt{8}\right)=3a_n+8b_n\pm\left(a_n+3b_n\right)\sqrt{8}\Rightarrow$ $a_{n+1}=3a_n+8b_n$ şi $b_{n+1}=a_n+3b_n, \forall n\geq 1$ şi deci afirmaţia este demonstrată prin inducţie matematică. Observăm că $(a_n)_n, (b_n)_n$ sunt strict crescătoare.Considerând şirurile $(t_n)_n, (u_n)_n$ de numere naturale astfel încât $t_n+u_n\sqrt{8}=\left(1+\sqrt{8}\right)\left(a_n+b_n\sqrt{8}\right)\Leftrightarrow t_n=a_n+8b_n$ şi $u_n=a_n+b_n, \forall n$ găsim o infinitate de numere naturale *n* pentru care $\sqrt{n+1}+\sqrt{8n+1}=u_n+t_n\in\mathbb{N}^*, n=u_n^2-1.$