CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN -TRIDENT ”
Ediţia a X-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 9 - 11. 11. 2012

CLASA a XI a

1. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu 2.

Să se afle suma elementelor matricei $B = A + A^2 + ... + A^{2012}$.

Carmen şi Viorel Botea

***Soluţie*:**

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ..... & ..... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$ şi $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$ atunci $AU = 2U; A^2U = A \cdot 2U = 2^2U$ şi prin inducţie $A^pU = 2^pU$,

$\forall p \in \mathbb{N}^*$. Deci suma elementelor fiecărei linii din matricea A^p este 2^p. Suma elementelor matricei A^k este $2^k \cdot n$, deci suma elementelor matricei B este $S = 2n + 2^2 \cdot n + ... + 2^{2012} \cdot n = 2n\left(2^{2012} - 1\right)$.

2. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}, (z_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n, y_n, z_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\text{şi } x_{n+1} \leq \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, y_{n+1} \leq \frac{x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n}{x_n + y_n + z_n} \text{ şi } z_{n+1} \leq \frac{3x_n y_n z_n}{x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n}. \forall n \geq 0.$$

a) Demonstraţi că şirurile sunt convergente şi au aceeaşi limită.

b) Dacă în loc de "$\leq$" considerăm "$=$" folosind, eventual a) arătaţi convergenţa şi apoi aflaţi limita.

Dan Negulescu, Brăila

***Soluţie*:**

a) Se demonstrează uşor c*ă* $\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{ab+bc+ac}{a+b+c} \geq \frac{3abc}{ab+bc+ac}$ deoarece prima inegalitate se mai scrie $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$ iar a doua $(ab-ac)^2 + (ab-bc)^2 + (ac-bc)^2 \geq 0$. De aici obţinem că $x_{n+1} \leq \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, y_{n+1} \leq \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, z_{n+1} \leq \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, \forall n \geq 0$. Obţinem imediat că $S_{n+1} \leq$ $\leq S_n$ şi $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi deci $(S_n)_n$ este convergent.

Fie $s = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Considerăm şirurile $a_n = x_n - \frac{S_{n-1}}{3} \leq 0, b_n = z_n - \frac{S_{n-1}}{3} \leq 0$ şi $c_n = z_n - \frac{S_{n-1}}{3} \leq 0, n \geq 1$ şi obţinem$a_n+b_n+c_n=S_n-S_{n-1}\to s-s=0$. Dar $a_n+b_n+c_n\le a_n\le 0,\forall n\ge 1$ şi obţinem $a_n\to 0$ deci $x_n\to\frac{s}{3}$. Analog $y_n\to\frac{s}{3}, z_n\to\frac{s}{3}$şi concluzia.

b)Din a) şirurile sunt convergente şi au aceeaşi limită. Înmulţind relaţiile obţinem $x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}=x_ny_nz_n$, $\forall n$ şi deci $x_ny_nz_n=x_0y_0z_0$şi deci limita este $\sqrt[3]{x_0y_0z_0}$.

Notăm $S_n=x_n+y_n+z_n\Rightarrow S_{n+1}\le S_n$ şi $S_n>0,\forall n$ şi deci $(S_n)_n$ este convergent.

3. Pentru $\sigma\in S_{2n}$ considerăm suma $S_\sigma=|1-\sigma(1)|+|2-\sigma(2)|+...+|2n-\sigma(2n)|$.

a) Calculaţi S_π unde $\pi\in S_{2n}$ este permutarea care are numărul maxim de inversiuni.

b) Calculaţi $M=\max\limits_{\sigma\in S_{2n}} S_\sigma$.

c) Dacă $A_n=(\sigma\in S_{2n}|S_\sigma\in M)$calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{card(A_n)}{card(S_{2n})}$.

Radu Vasile, Brăila

***Soluţie*:**

a) Se ştie că $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n & n+1.... & 2n\\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & ... & n+1 & n... & 1\end{pmatrix}$, deci

$S_\pi=|1-2n|+|3-2n|+...+|n-n-1|+|n+1-n|+...+|2n-1|=2[1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)]=n^2$.

b) Pentru $\sigma=\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n & n+1.... & 2n\\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & ... & n+1 & n... & 1\end{pmatrix}$ se observă că $\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)\}=$ $=\{n+1,n+2,...,2n\}$ şi $\{\sigma(n+1),\sigma(n+2),...,\sigma(2n)\}=\{1,2,...,n\},(1)$.

Evident că orice permutare σ care verifică $(1)$are proprietate că $S_\sigma=2n^2$. Demonstrăm că dacă S_σ este maximă atunci σ verifică condiţiile (1). Presupunem prin absurd că $\exists i\le n$astfel încât $\sigma(i)\le n$ atunci evident $\exists j>n$ astfel încât $\sigma(j)>n.$ Notăm $\sigma(i)=k$ şi $\sigma(j)=l$ şi avem $i\le n<j$ şi $k\le n<l,(2)$. Considerăm $\sigma^/=\sigma\cdot(i,j)$ şi vom demonstra că $S_{\sigma^/}>S_\sigma$ unde

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & ... & i & ... & j & ...\\ 1 & ... & l & ... & k & ...\end{pmatrix},\sigma^/=\begin{pmatrix}1 & ... & i & ... & j & ...\\ 1 & ... & k & ... & l & ...\end{pmatrix}$$

$S_{\sigma^/}>S_\sigma\Leftrightarrow|i-l|+|j-k|>|i-k|+|j-l|\Leftrightarrow l-i+j-k>|i-k|+|j-l|,(*)$. Pentru modulele din dreapta avem patru cazuri:

i) $l-i+j-k>i-k+j-l\Leftrightarrow 2l>2i(A)$

ii) $l-i+j-k>k-i+j-l\Leftrightarrow 2l>2k,(A)$

iii) $l-i+j-k>i-k+l-j\Leftrightarrow 2j>2i,(A)$

iv) $l-i+j-k>k-i+l-j \Leftrightarrow 2j>2k,(A)$

Deci $(*)$ este adevărată $\Rightarrow S_{\sigma'} > S_{\sigma}$ dar S_{σ} este maximă contradicţie . Prin urmare dacă S_{σ} este maximă atunci σ verifică condiţiile (1) şi în acest caz $S_{\sigma} = 2n^2 = M$.

c) Din b) rezultă că dacă $\sigma \in S_{2n}$ atunci $\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)\} = \{n+1,n+2,...,2n\}$ şi $\{\sigma(n+1),\sigma(n+2),...,\sigma(2n)\} = \{1,2,...,n\},(n!\text{ cazuri}) \Rightarrow card(A_n) = (n!)^2$. Limita devine

$$\lim_{n\to\infty}\frac{card(A_n)}{card(S_{2n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)(n+2)...2n} = 0(\text{criteriul majorării}).$$