CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN -TRIDENT ”
Ediţia a X-a , Secţiunea B (M_2),
Brăila, 09 - 11.11. 2012

CLASA a XI a

1. Determinaţi matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A^3 = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix}, TrA = 9, TrA^2 = 69$.

Daniela Haret

Soluţie:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a + d = 9$ şi $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 + 2bc + d^2 = 69 \Rightarrow (a - d)^2 + 2bc -$

$-2ad = 69 \Rightarrow ad - bc = 6.$

Din $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 - 9A + 6I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 = 9A - 6I_2 \Rightarrow A^3 = 75A - 54I_2.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 75a - 54 & 75b \\ 75c & 75d - 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 8 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. a) Dacă $a_i, x_i, i \in \overline{1,n}$ sunt numere reale, atunci are loc inegalitatea:

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$, cu egalitate dacă $x_i \cdot a_j = x_j \cdot a_i, i \ne j, i, j = \overline{1,n}$.

b) Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} tga_k x\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} tg^2 a_k x} \ge n, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Arătaţi că $a_1 = a_2 = ... = a_n$. .

Mihaela Giurcă

Soluţie:

a) Se demonstrează utilizând metoda inducţiei matematice.

b) Utilizând limita remarcabilă : $\lim\limits_{u(x) \to 0} \frac{tgu(x)}{u(x)} = 1$ obţinem : $\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \ge n$

Conform punctului a) avem: $\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \le n$,de unde avem egalitate.Egalitatea are loc dacă

$a_1 = a_2 = ... = a_n$.

3. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A + B = A \cdot B$. Să se arate că pentru $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $A + B + B^2 + ... + B^k = O_2$;

$b)$ $B^{k+1} = O_2$

Roxandra Murea

Soluţie:

a) $\Rightarrow$ b) Înmulţim egalitatea de la a) cu B şi obţinem:

$A \cdot B + B^2 + B^3 + ... + B^{k+1} = O_2 \Rightarrow A + B + B^2 + B^3 + ... + B^{k+1} = O_2 \Rightarrow B^{k+1} = O_2$

$b) \Rightarrow a)$ Dacă $B^{k+1} = O_2 \Rightarrow A \cdot B^{k+1} = O_2$

Înmulţim la dreapta cu B următoarele egalităţi, le adunăm şi obţinem:

$$\begin{aligned} &A + B = AB \\ &AB + B^2 = AB^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &AB^{k-1} + B^k = AB^{k+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A + B + B^2 + ... + B^k = AB^{k+1} = O_2$