CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
Ediţia a X-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 9 - 11. 11. 2012

CLASA a XII a

1. a) Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţie care admite primitive dacă $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{2013 ori}(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}.$

b) Să se arate că există $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţie care nu admite primitive astfel încât $\underbrace{(g\circ g\circ\ldots\circ g)}_{2012 ori}(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}.$

Dan Negulescu

***Soluţie*:**

a) Notăm $f_n = f\circ f\circ\ldots\circ f$ de n ori, $n\ge 2$. Arătăm că f este bijectivă. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)= f(y)\Rightarrow f_{2013}(x)=f_{2013}(y)\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă. Pentru $y\in\mathbb{R}$ arbitrar există $x=f_{2012}(y)\in\mathbb{R}$ astfel încât $f\circ(f_{2012}(y))=f_{2013}(y)=y$ deci f este bijectivă. Atunci f este bijectivă.

Funcţia f este bijectivă şi f are proprietate lui Darboux $\Rightarrow f$ continuă şi deci strict monotonă.Nu se poate f strict descrescătoare deoarece atunci f_{2013} descrescătoare şi contrazice ipoteza. Deci f este strict crescătoare. Presupunem că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)\ne a$.

Dacă $f(a)<a\Rightarrow f_2(a)<f(a)<a\Rightarrow f_3(a)<f_2(a)<f(a)<a\Rightarrow a=f_{2013}(a)<f_{2012}(a)<\ldots< f_2(a)<f(a)<a$, contradicţie. La fel dacă $f(a)>a\Rightarrow a=f_{2013}(a)>f_{2012}(a)>\ldots>f_2(a)> f(a)>a$. Deci $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} x & \text{pentru } x\in\mathbb{Q} \\ -x & \text{pentru } x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}\end{cases}$ este bijectivă şi nu are proprietatea lui Darboux deci nu are primitive pe $\mathbb{R}$ şi cum $g_2(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g_{2012}(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ deci g verifică. Dacă presupunem că g are proprietatea lui Darboux, cum $g(1)g(\sqrt{2})=-\sqrt{2}<0$ există $c\in(1,\sqrt{2})$ astfel încât $g(c)=0\Rightarrow c=0,$ contradicţie.

2. Pe mulţimea $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ se defineşte operaţia

$$(a,b)*(c,d)=(ac+5bd, ad+bc).$$

Fie mulţimea $S=\left\{(u,v)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \middle| u^2-5v^2=1\right\}$.

a) Calculaţi $\underbrace{(9,4)*(9,4)*\ldots*(9,4)}_{n \text{ ori}}, n\ge 1.$

b) Arătaţi că S are o infinitate de elemente.

Carmen şi Viorel Botea

***Soluţie*:**

a) Notăm $(a_n,b_n)=\underbrace{(9,4)*(9,4)*...*(9,4)}_{n\text{ ori}}, n\geq 1\Rightarrow (9,4)*(a_n,b_n)=(9a_n+20b_n,9b_n+4a_n)\Rightarrow a_{n+1}=$

$=9a_n+20b_n\Rightarrow b_n=\dfrac{a_{n+1}-9a_n}{20}, b_{n+1}=9b_n+4a_n\Rightarrow \dfrac{a_{n+2}-9a_{n+1}}{20}=9\dfrac{a_{n+1}-9a_n}{20}+4a_n\Rightarrow a_{n+2}-9a_{n+1}=$

$=9a_{n+1}-81a_n+80a_n\Rightarrow a_{n+2}-18a_{n+1}+a_n=0\Rightarrow t^2-18t+1=0,\ \Delta=320\Rightarrow\ t_{1,2}=\dfrac{18\pm 8\sqrt{5}}{2}=9\pm 4\sqrt{5}\Rightarrow$

$$a_n=c_1\left(9+4\sqrt{5}\right)^n+c_2\left(9-4\sqrt{5}\right)^n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}9=a_1=c_1\left(9+4\sqrt{5}\right)+c_2\left(9-4\sqrt{5}\right),\\161=a_2=c_1\left(9+4\sqrt{5}\right)^2+c_2\left(9-4\sqrt{5}\right)^2\end{cases}\Rightarrow c_2=\frac{1}{2},c_1=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(9+4\sqrt{5}\right)^n+\left(9-4\sqrt{5}\right)^n\right]\\b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(9+4\sqrt{5}\right)^n-\left(9-4\sqrt{5}\right)^n\right]\end{cases}$$

b) $(9,4)\in S$; demonstrăm că dacă $(a,b),(c,d)\in S\Rightarrow(a,b)*(c,d)\in S;(ac+5bd)^2-5(ad+bc)^2=(a^2-5b^2)$ $(c^2-5d^2)=1\Rightarrow\underbrace{(9,4)*(9,4)*...*(9,4)}_{n\text{ ori}}\in S.(9,4)*(a_n,b_n)=(9a_n+20b_n,9b_n+4a_n)\Rightarrow a_{n+1}=9a_n+20b_n>a_n\Rightarrow$ $b_{n+1}=9b_n+4a_n>b_n\Rightarrow S$ are o infinitate de elemente distincte.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\arccos\dfrac{1-x^4}{1+x^4}}{2\left(x^2+1\right)}$ şi F este o primitivă a lui f care se anulează în $x_0=0.$

Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}F(x).$

Carmen şi Viorel Botea

***Soluţie*:** f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

$\forall x\geq 0$ avem $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2arctgx,$ deci $f(x)=\dfrac{\operatorname{arc tg} x^2}{x^2+1}$; avem $\operatorname{arc}tg\ x+\operatorname{arc}tg\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2},\forall x>0.$

$$F(x)=\int\frac{\operatorname{arc}tg\ x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}tg\frac{1}{x^2}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{arc}tgx+\int\frac{\operatorname{arc}tg\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}\left(\frac{1}{x}\right)'dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{arc}tgx+F\left(\frac{1}{x}\right)+c\Rightarrow$$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{arc}tgx+F\left(\dfrac{1}{x}\right)+c,\ \forall x>0.$ Pentru $x=1\Rightarrow F(1)=\dfrac{\pi^2}{8}+F(1)+c\Rightarrow c=-\dfrac{\pi^2}{8}\Rightarrow$

$F(x)=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{arc}tgx+F\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{\pi^2}{8},\forall x>0.$ Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\dfrac{\pi^2}{4}+0-\dfrac{\pi^2}{8}=\dfrac{\pi^2}{8}.$