CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN -TRIDENT ”
Ediţia a X-a , Secţiunea B (M_2),
Brăila, 09 - 11.11. 2012

CLASA a XII a

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie bijectivă cu $f(1)=0$. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie $a*b=f\left[f^{-1}(a)+f^{-1}(b)-1\right]$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$. Arătaţi că $(\mathbb{R},*)$ este grup abelian.

***

***Soluţie*:**

Demonstrăm asociativitatea: $(a*b)*c=a*(b*c),\forall a,b,c\in\mathbb{R}$

$(a*b)*c=f\left[f^{-1}(a*b)+f^{-1}(c)-1\right]=f\left[f^{-1}(a)+f^{-1}(b)+f^{-1}(c)-1\right]$

$a*(b*c)=f\left[f^{-1}(a)+f^{-1}(b)+f^{-1}(c)-1\right]$

Demonstrăm comutativitatea: $a*b=b*a,\forall a,b\in\mathbb{R}$

$a*b=f\left[f^{-1}(a)+f^{-1}(b)-1\right]=f\left[f^{-1}(b)+f^{-1}(a)-1\right]=b*a$.

Determinăm elementul neutru: $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $a*e=e*a=a,\forall a\in\mathbb{R}$

$a*e=f\left[f^{-1}(a)+f^{-1}(e)-1\right]=a\Rightarrow f^{-1}(e)-1=0\Rightarrow e=0, a*e=e*a$ adevărată din comutativitate.

Orice element din $\mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie “*”:

$\forall a\in\mathbb{R},\exists a'\in\mathbb{R}$ astfel încât $a*a'=a'*a=e\Rightarrow a*a'=e=0\Rightarrow f^{-1}(a)+f^{-1}(a')-1=f^{-1}(0)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow a'=f\left[2-f^{-1}(a)\right]$.Relaţia $a*a'=a'*a$ este adevărată din comutativitate.

2. Fie mulţimile $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$ şi $K=\left\{n\in\mathbb{N}\middle| n=a^3+b^3+c^3-3abc;\ a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Arătaţi că dacă $A,B\in M$ atunci şi $A\cdot B\in M$.

b) Pentru orice $m,n\in K$ avem $m\cdot n\in K$.

***

Soluţie:

a) Se demonstrează prin calcul direct

b) Dacă $A \in M \Rightarrow \det A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = n \in K, \forall n_1, n_2 \in K \Rightarrow n_1 \cdot n_2 = \det A \cdot \det B = \det A \cdot B$, unde *A* şi *B* sunt din mulţimea *M*. Deoarece mulţimea *M* este parte stabilă, atunci şi $\det AB$ este de forma unui element din mulţimea *K*. Rezultă *K* parte stabilă în raport cu operaţia de înmulţire a numerelor naturale.

3. Fie funcţiile $f, g, G : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(3+\ln x)(5+\ln x)}, g(x) = \dfrac{1}{x(a+\ln x)}$, $a > 0$ şi $G(x) = \ln(a+\ln x)$.

a) Arătaţi că *G* este o primitivă a lui g pe intervalul $[1, +\infty)$.

b) Determinaţi o primitivă F a funcţiei f pe intervalul $[1, +\infty)$ cu proprietatea $F(e^2) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$.

Mădălina Teodorescu

Soluţie:

a) Prin calcul se arată că $G'(x) = g(x), \forall x \in [1, +\infty)$

b) $F(x) = \int \dfrac{1}{x(3+\ln x)(5+\ln x)} dx = \dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x(3+\ln x)} - \dfrac{1}{x(5+\ln x)}\right)dx = \dfrac{1}{2}\left(\ln(3+\ln x) - \ln(5+\ln x)\right) + c$

$F(e^2) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7} + c = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7} \Rightarrow c = 0$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.