CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a X-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 9 - 11. 11. 2012

CLASA a VI - a

1. Fie $\measuredangle AOD$ cu $m(\measuredangle AOD)=98^\circ$ şi $(OB,(OC$ semidrepte incluse în interiorul $\measuredangle AOD$, $(OC$ semidreaptă inclusă în interiorul $\measuredangle BOD$ astfel încât $a\cdot m(\measuredangle AOB)=c\cdot m(\measuredangle BOC)$ şi $b\cdot m(\measuredangle BOC)=c\cdot m(\measuredangle COD)$ unde a,b,c sunt numere prime care verifică relaţia $3a+5(3b+7c)=195.$ Să se afle $m(\measuredangle AOB), m(\measuredangle BOC)$ şi $m(\measuredangle COD)$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluţie*:**

$195\vdots 3$ şi $3a\vdots 3\Rightarrow 3b+7c\vdots 3\Rightarrow c\vdots 3, c$ prim $\Rightarrow c=3; 195\vdots 5\Rightarrow 3a\vdots 5\Rightarrow a\vdots 5, a$ prim $\Rightarrow a=5\Rightarrow$
$\Rightarrow 15+5(3b+21)=195\Rightarrow 5(3b+21)=180\Rightarrow 3b+21=36\Rightarrow 3b=15\Rightarrow b=5\Rightarrow 5m(\measuredangle AOB)=$
$=3m(\measuredangle BOC)\Rightarrow m(\measuredangle AOB)=\frac{3}{5}m(\measuredangle BOC),$
$5m(\measuredangle BOC)=3m(\measuredangle COD)\Rightarrow m(\measuredangle COD)=\frac{5}{3}m(\measuredangle BOC)\Rightarrow m(\measuredangle BOC)+\frac{3}{5}m(\measuredangle BOC)+\frac{5}{3}m(\measuredangle BOC)$
$=98^0\Rightarrow 49m(\measuredangle BOC)=15\cdot 98^0\Rightarrow m(\measuredangle BOC)=30^0\Rightarrow m(\measuredangle AOB)=18^0\Rightarrow m(\measuredangle COD)=\frac{5}{3}\cdot 30^0=50^0.$

2. Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$, mai mici decât 500, dacă:
a) dau restul 5 la împărţirea cu 9;
b) $(a+b+c)\vdots 7$ şi $(\overline{acb}+2)\vdots 7.$

Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie:

Din teorema împărţirii cu rest, avem: $\overline{abc}=9k+5, k$ număr natural şi $a+b+c=7p, p$ număr natural. Deoarece a,b,c sunt cifre, $a+b+c\in\{7;14;21\}$. Dar $\overline{abc}=99a+9b+(a+b+c)=9k+5,$ deci $a+b+c$ este de forma $9t+5$. Dintre numerele 7, 14 şi 21 singurul care satisface condiţia anterioară este 14, deci $a+b+c=14.$ Dacă $\overline{abc}$ dă restul 5 la împărţirea cu 9, atunci si $\overline{acb}$ dă restul 5 la împărţirea cu 9, deci $\overline{acb}=9s+5$. Atunci $\overline{acb}+2=9s+7\vdots 7$, deci $s\vdots 7$. În concluzie $\overline{acb}+2$ este de forma $63n+7.$ Avem $\overline{acb}=63n+7\in\{131;194;257;320;383;446\}$. Dintre acestea doar{194;257;383;446} verifică $a+b+c=14$. Numerele căutate sunt: 149; 275;338;464.

3. Se consideră numerele $a_1=4, a_2=3a_1+4, a_3=3a_2+4^2, ..., a_{2013}=3a_{2012}+4^{2012}$.

a) Calculaţi a_{2013}.

b) Arătaţi că $\left(a_1+a_2+...+a_{2013}\right) \vdots \frac{2^{22}-1}{3}$.

Carmen şi Viorel Botea

***Soluţie*:**

a) $a_2=3\cdot 4+4=4(3+1)=4^2, a_3=4^3,$ deci $a_{2013}=4^{2013}$.

b)

$$S=4+4^2+4^3+...+4^{2013}=\left(4+4^2+4^3+...+4^{11}\right)+4^{11}\left(4+4^2+4^3+...+4^{11}\right)+4^{2002}\left(4+4^2+4^3+...+4^{11}\right)=$$

$$=\left(4+4^2+4^3+...+4^{11}\right)\left(4+4^{11}+4^{22}+...+4^{2002}\right) \vdots \left(4+4^2+4^3+...+4^{11}\right) \Rightarrow S \vdots \frac{2^{22}-1}{3},$$ deoarece

$$4+4^2+4^3+...+4^{11}=\frac{4\left(4^{11}-1\right)}{3}=\frac{4\left(2^{22}-1\right)}{3}.$$