CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 9 - 11. 11. 2012

CLASA a VII a

1. Se dă triunghiul dreptunghic ABC, $m(\measuredangle BAC)=90^\circ$. Fie punctul $M\in(BC)$ şi P respectiv Q simetricele punctului M faţă de AB respectiv AC. Arătaţi că:
a) Punctele P, A, Q coliniare.
b) Dacă $AM\perp BC$ şi $m(\measuredangle ACB)=15^0$, aflaţi perimetrul triunghiului MPQ în funcţie de lungimile laturilor triunghiului dreptunghic ABC.

Daniela Tilincă şi Adriana Mihăilă, Brăila

***Soluţie*:**

a) Fie $MT\perp AC; MR\perp AB$. În $\Delta MAQ, AT$ mediană, AT înălţime $\Rightarrow \Delta MAQ$ isoscel $\Rightarrow MA=AQ$ şi $m(\measuredangle QAT)=m(\measuredangle TAM)=x$. În $\Delta MAP, AR$ mediană, AR înălţime $\Rightarrow \Delta MAP$ isoscel $\Rightarrow MA=AP$ şi $m(\measuredangle MAR)=m(\measuredangle RAP)=y$. Dar $m(\measuredangle CAB)=90^0=x+y\Rightarrow m(\measuredangle QAP)=2x+2y=180^0$.

b) ΔABC dreptunghic, $m(\measuredangle BCA)=15^0\Rightarrow AM$ înălţime $\Rightarrow AM=\dfrac{BC}{4}(*)$. În $\Delta AMB, m(\measuredangle AMB)=90^0$, $m(\measuredangle MAB)=15^0, MR$ înălţime $\Rightarrow MR=\dfrac{BA}{4}$.În $\Delta AMC, m(\measuredangle AMC)=90^0, m(\measuredangle MCA)=15^0$, MT înălţime $\Rightarrow MT=\dfrac{CA}{4}\Rightarrow P(\Delta MPQ)=2MT+2MR+2MA=2\left(\dfrac{AC}{4}+\dfrac{AB}{4}+\dfrac{BC}{4}\right)$.

Deci $P(\Delta MPQ)=\dfrac{P(\Delta ABC)}{2}$. Demonstrăm $(*)$.Fie AO mediană $\Rightarrow AO=\dfrac{BC}{2}\Rightarrow \Delta AOC$ isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\measuredangle AOC)=150^0$. În $\Delta AOM, m(\measuredangle AMO)=90^0, m(\measuredangle AOM)=30^0\Rightarrow AM=\dfrac{AO}{2}=\dfrac{BC}{4}$.

2. Să se determine numerele naturale m şi n astfel încât:

$$1\cdot 2\cdot 3...\cdot n-20=m^2.$$

Ion Cucurezeanu, Gazeta Matematică

***Soluţie*:**

Pentru $n\geq 6$ avem $n!-20=k\cdot 6!-20=720k-20=4(180k-5)=4(4p+3)$, unde $k, p\in\mathbb{N}$. Cum $4p+3$ nu este pătrat perfect rezultă că ecuaţia nu are soluţii (m,n) cu $n\geq 6$. Cum $n!-20<0$

pentru $n \in \{0,1,2,3\}$, rămân de analizat cazurile $n=4$ şi $n=5$. Cum $24-20=2^2$ şi $120-20=10^2$ rezultă că avem soluţiile $(2,4)$ şi $(10,5)$.

3. Se dau mulţimile $A=\{a,b\}, B=\{c,d\}, C=\{e,f\}, D=\{g\}, M=A\cup B\cup C\cup D$ cu proprietăţile $2a+b=3g, 2c+d=3g, 2e+f=3g$ şi $CardM=7$.

i) Să se demonstreze că M poate conţine 6 numere naturale consecutive.

ii) Să se demonstreze că M nu poate conţine 7 numere naturale consecutive.

Gabriel Daniilescu, Brăila

***Soluţie*:**

i) $A=\{1,10\}, B=\{2,5\}, C=\{3,6\}, D=\{4\}, M=\{1,2,3,4,5,6,10\}$ verifică proprietăţile din enunţ.
ii) Presupunem prin reducere la absurd că

$\exists n \in \mathbb{N}$ astfel încât $M=\{n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g=7n+28$ şi $2a+b+2c+d+2e+f=9g \Leftrightarrow 2(a+c+e)+b+d+f=9g$.
Notăm $a+c+e=x$ şi $b+d+f=y \Rightarrow 2x+y=9g$ şi $x+y+g=7n+28$. Vom demonstra că $g=n+4$.
Avem $x=(2x+y)-(x+y)=9g-(7n+28-g)=10g-(7n+28)$.
Dacă $g \le n+3 \Rightarrow 10g \le 10n+30 \Rightarrow 10g-(7n+28) \le 10n+30-7n-28 \Rightarrow x \le 3n+2$.
Dar $x=a+c+e \ge n+1+n+2+n+3=3n+6,$ contradicţie! Deci $g \ge n+4, (1)$.
Apoi $y=2(x+y)-(2x+y)=2(7n+28-g)-9g=14n+56-11g$. Dacă $g \ge n+5 \Rightarrow 11g \ge 11n+55 \Rightarrow$
$\Rightarrow 14n+56-11g \le 14n+56-11n-55 \Rightarrow y \le 3n+1$. Dar $y=b+d+f \ge n+1+n+2+n+3=3n+6$, contradicţie! Deci $g \le n+4, (2)$. Din (1) şi (2) rezultă $g=n+4$.
Avem $2a+b=3g \Leftrightarrow 2a+b=2g+g \Leftrightarrow 2(a-g)+b=g \Rightarrow b$ şi g au aceeaşi paritate şi analog, din $2c+d=3g$ şi $2e+f=3g \Rightarrow d$ şi g au aceeaşi paritate şi de asemenea f şi g au aceeaşi paritate. Deci în M avem 4 numere cu aceeaşi paritate, adică b, d, f şi g. Dar $g=n+4$ şi în M au aceeaşi paritate cu $n+4$, doar $n+2$ şi $n+6$, în total 3 numere, contradicţie! Deci M nu poate conţine 7 numere naturale consecutive.