CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a X-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 9 - 11. 11. 2012

CLASA a VIII a

1. Dacă $x, y > 0$ arătaţi că: a) $\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$ şi $\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$.

b) $\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{5}{2}$.

Dan Negulescu, Brăila

***Soluţie*:** a) Inegalităţile se scriu echivalent $\left(x-y\right)^2 \geq 0$ şi $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$.

b) Scriem sub forma $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}} \geq 2 \Rightarrow S^2 - 2 + \frac{1}{S} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow 2S^3 - 4S - 5S +$

$+2 \geq 0 \Leftrightarrow 2S^3 - 8S - S + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2S\left(S^2-4\right)-\left(S-2\right) \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\left(S-2\right)}_{\geq 0}\underbrace{\left(2S^2+4S-1\right)}_{>0} \geq 0,$ adevărat.

2 . Arătaţi că nu există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

$$\left(a-b\right)^3+\left(b-c\right)^3+\left(c-a\right)^3 = 2013$$

Nazeli Boicescu, Brăila

***Soluţie*:**

Se ştie că $x^3+y^3+z^3-3xyz = \left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$. Notăm cu $x = a-b, y = b-c,$ $z = c-a \Rightarrow x+y+z = 0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3 = 3xyz \Rightarrow 3xyz = 2013 \Rightarrow xyz = 671 \Rightarrow x, y, z$ impare $\Rightarrow x+y+z$ impară, contradicţie cu $x+y+z = 0$. Deci nu există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cu proprietăţile cerute.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi $M, P \in (BC')$ astfel încât $BM = MP = PC'$, $AB = 6$ cm .
a) Determinaţi valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele $A'P$ şi DM.

b) Dacă $A'P \cap (DCC') = \{S\}$ şi $DM \cap (ABB') = \{T\}$, atunci determinaţi lungimea segmentului [*ST*].

Daniela Narcisa Ivan, Brăila

***Soluţie*:**

a) Construim cubul $ABC_1D_1A'B'C_1'D_1'$ şi fie $R \in (D_1A')$ astfel încât $A'R = \frac{1}{3} \cdot D_1A'$. $A'RMP$ paralelogram atunci $\cos\measuredangle(A'P; DM) = \cos\measuredangle(RMD)$. Lucrăm în triunghiul *RDM*, se efectuează calculele şi obţinem: $RM = 2\sqrt{14}, DM = 2\sqrt{14}, RD = 4\sqrt{5}.$ Din teorema cosinusului obţinem: $\cos\measuredangle(RMD) = \frac{2}{7}.$

b) Fie $PP' \perp CC' \Rightarrow D'P' \cap A'P = \{S\}$. Fie $MM' \perp BB' \Rightarrow DM \cap AM' = \{T\}$. Dacă $TT' \perp AB$ şi $SS' \perp DC$ atunci vom lucra în trapezul $TSS'T'$ pentru a calcula ST. Obţinem pe rând: $TT' = 3$cm, $BT' = 3$cm, $CS' = 3$cm, $SS' = 3$cm $\Rightarrow ST = T'S' = 6$cm.