CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
Ediţia a X-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 9 - 11. 11. 2012

CLASA a IX a

1. În triunghiul ABC fie N mijlocul laturii $(AC), AD \perp BC, D \in (BC), P \in (AD)$ astfel încât $\measuredangle ABP \equiv \measuredangle NBC$. Dacă $(AP) \equiv (PD)$, să se demonstreze că $m(\measuredangle BAC) = 90^0$.

Marius Damian, Brăila

***Soluţie*:**

În triunghiul $DAB, [BP]$ este mediană, deci (1) $aria[PBA] = aria[PBD]$.În triunghiul $ADC, [PN]$ este linie mijlocie; în consecinţă $PN \| DC$ şi obţinem (2) $aria[PBD] = aria[NBD]$. Din (1) şi (2) rezultă că (3) $aria[PBA] = aria[NBD]$. Dar (4) $aria[PBA] = \frac{1}{2} BA \cdot BP \cdot \sin(\measuredangle ABP)$.

(5) $aria[NBD] = \frac{1}{2} BN \cdot BD \cdot \sin(\measuredangle NBD)$. Din $(3),(4),(5)$ ţinând cont că $\sin(\measuredangle ABP) = \sin(\measuredangle NBD) \Rightarrow$

$\Rightarrow BA \cdot BP = BN \cdot BD \Rightarrow (6) \frac{AB}{BD} = \frac{BN}{BP} \Rightarrow \Delta ABN \sim \Delta DBP \Rightarrow \measuredangle BAN \equiv \measuredangle BDP \Rightarrow m(\measuredangle BAC) = 90^0$.

2. Din mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 2n, 2n+1\}, (n \in \mathbb{N}^*,\ \text{fixat})$ alegem la întâmplare $n+1$ numere distincte a căror sumă o notăm cu S_n.

a) Determinaţi cea mai mică valoare pentru S_n, respectiv pe cea mai mare.

b) Arătaţi că pentru orice alegere a celor $n+1$ numere, fie unul dintre ele este $n+1$ sau există două numere a căror sumă este este $2n+2$.

Dan Negulescu, Brăila

***Soluţie*:**

a) Cea mai mică valoare pentru S_n este $1+2+3+...+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ iar cea mai mare valoare $(n+1)+(n+2)+...+(2n+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.

b) Dacă $n+1$ se găseşte printre cele $n+1$ numere alese demonstraţia se încheie. În caz contrar mulţimea $\{1,2,3,...,n,n+2,n+3,...,2n,2n+1\}=\{1,2n+1\}\cup\{2,2n\}\cup\{3,2n-1\}\cup...\cup\{n,n+2\}$ este reuniune de n mulţimi disjuncte, deci în alegerea celor $n+1$ numere avem obligatoriu două din aceeaşi mulţime şi deci două a căror sumă este $2n+2$.

3. Fie un triunghi ABC cu laturile de lungimi a,b,c. Demonstraţi că

$$\left\{\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}\right\}\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right).$$

Pentru $x\in\mathbb{R},\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluţie*:**

$$0<\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}<1\Leftrightarrow a^2\left(b+c\right)+b^2\left(c+a\right)+c^2\left(a+b\right)>0\Rightarrow\left[\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}\right\}=\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}.$$ Arătăm că $\frac{1}{3}\le\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}<\frac{1}{2}$.

$\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a^3+2b^3+2c^3<a^3+a^2\left(b+c\right)+b^3+b^2\left(c+a\right)+c^3+c^2\left(a+b\right)$, adevărat pentru că $b+c>a, a+c>b, a+b>c$.

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}\ge\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3a^3+3b^3+3c^3\ge a^3+a^2b+a^2c+b^3+b^2c+b^2a+c^3+c^2a+c^2b\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2a^3+2b^3+2c^3\ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$. Avem $a^3+b^3\ge ab\left(a+b\right)\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge 0$ şi analoagele ,de unde concluzia.