CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN -TRIDENT "
Ediţia a X-a , Secţiunea B (M_2),
Brăila, 09 - 11.11. 2012

CLASA a IX a

1. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC şi G_A, G_B, G_C respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor MBC, MAC, MAB.Să se arate că $\overrightarrow{AG_A}+\overrightarrow{BG_B}+\overrightarrow{CG_C}=\vec{0}$ dacă şi numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

***

Soluţie:

$$\overrightarrow{AG_A}+\overrightarrow{BG_B}+\overrightarrow{CG_C}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}=\vec{0} \Leftrightarrow G=M$$

2. Arătaţi că ecuaţia: $\left[x+|x|\right]=\left|x+[x]\right|$ are ca soluţii doar numere naturale, unde $[x]$, $|x|$ reprezintă partea întreagă a lui x, respectiv modulul numărului x.

***

Soluţie:

Cazul 1: $x<0 \Rightarrow \left[x+|x|\right]=0$ şi $\left|x+[x]\right|>0$.
Cazul 2: $x \geq 0 \Rightarrow [2x]=x+[x] \Rightarrow [2x]=2[x]+\{x\}$
Din relaţiile anterioare rezultă că $\{x\}=0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$

3. Fie $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică de numere reale.

a) Arătaţi că oricare ar fi numerele naturale nenule distincte m,n,p, există cel puţin $\alpha \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a_m=\alpha \cdot a_n+(1-\alpha)\cdot a_p$.

b) Arătaţi că dacă progresia conţine doi termeni raţionali, atunci $a_m \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$.

c) Dacă $\sqrt{2},\sqrt{3}$ sunt termeni ai progresiei aritmetice, atunci $a_m \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$.

***

Soluţie:

a) În relaţia $a_m = \alpha \cdot a_n + (1-\alpha) \cdot a_p$ se înlocuiesc termenii: a_m, a_n, a_p După efectuarea calculelor se obţine $\alpha = \frac{m-p}{n-p}, \alpha \in \mathbb{Q}$

b) Dacă $a_n, a_p \in \mathbb{Q}$, folosind relaţia de la punctul a) avem $a_m \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$

c) $a_m = \alpha\sqrt{2} + (1-\alpha)\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.