CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN -TRIDENT ”
Ediţia a X-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 9 - 11. 11. 2012

CLASA a XI a

1. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu 2. Să se afle suma elementelor matricei $B = A + A^2 + ... + A^{2012}$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

2. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}, (z_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n, y_n, z_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$x_{n+1} \leq \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, y_{n+1} \leq \frac{x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n}{x_n + y_n + z_n} \text{ şi } z_{n+1} \leq \frac{3x_n y_n z_n}{x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n}. \forall n \geq 0.$$

a) Demonstraţi că şirurile sunt convergente şi au aceeaşi limită.

b) Dacă în loc de "$\leq$" considerăm "$=$" folosind, eventual a) arătaţi convergenţa şirurilor şi aflaţi limita lor.

Dan Negulescu, Brăila

3. Pentru $\sigma \in S_{2n}$ considerăm suma $S_\sigma = |1-\sigma(1)| + |2-\sigma(2)| + ... + |2n - \sigma(2n)|$.

a) Calculaţi S_π unde $\pi \in S_{2n}$ este permutarea care are numărul maxim de inversiuni.

b) Calculaţi $M = \max\limits_{\sigma \in S_{2n}} S_\sigma$.

c) Dacă $A_n = \{\sigma \in S_{2n} | S_\sigma = M\}$ calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{card(A_n)}{card(S_{2n})}$.

Radu Vasile, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.