CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN -TRIDENT "
Ediţia a X-a , Secţiunea B (M_2),
Brăila, 09 - 11.11. 2012

CLASA a XII a

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie bijectivă cu $f(1)=0$. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie $a*b=f\left[f^{-1}(a)+f^{-1}(b)-1\right]$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$. Arătaţi că $(\mathbb{R},*)$ este grup abelian.

***

2. Fie mulţimile $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$ şi $K=\left\{n\in\mathbb{N} \middle| n=a^3+b^3+c^3-3abc;\ a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Arătaţi că dacă $A,B\in M$ atunci şi $A\cdot B\in M$.

b) Pentru orice $m,n\in K$ avem $m\cdot n\in K$.

***

3. Fie funcţiile $f,g,G:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(3+\ln x)(5+\ln x)}$,

$g(x)=\dfrac{1}{x(a+\ln x)}$, $a>0$ si $G(x)=\ln(a+\ln x)$.

a) Arătaţi că G este o primitivă a lui g pe intervalul $[1,+\infty)$.

b) Determinaţi o primitivă F a funcţiei f pe intervalul $[1,+\infty)$ cu proprietatea $F\left(e^2\right)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$

Mădălina Teodorescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.