Concursul Interjudeţean de Matematică
"Alexandru Papiu-Ilarian", Ediţia a XVII-a
Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş, 2012
Clasa a IX-a

1. Se consideră ecuaţia de gradul II:

$$2^a \cdot x^2 + 2^b \cdot x + 2^c = 0,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Să se arate că dacă rădăcinile acestei ecuaţii sunt numere raţionale, atunci $a + c = 2(b - 1)$.

2. Fie A, B o partiţie a mulţimii numerelor întregi: $\mathbb{Z} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ şi $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel ca $a + A = b + B$.

a) Să se dea exemplu de astfel de partiţie şi de numere a, b.

b) Să se arate că există $c \in \mathbb{Z}^*$ astfel ca $A + c = A$.

(S-a notat $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$).

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu laturile

$$AB = a,\ AD = b,\ AA' = c,$$

diagonalele feţelor $AB' = d_1$, $AC = d_2$, $AD' = d_3$ şi diagonala mare $AC' = d$.

Să se demonstreze inegalităţile:

$$\sqrt{2}(a + b + c) \leq d_1 + d_2 + d_3 \leq \sqrt{6}d.$$

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Să se arate că dacă $MP = \frac{1}{2}(AB + CD)$ şi $NQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ atunci patrulaterul este romb.

1. Se consideră ecuaţia de gradul II:

$$2^a \cdot x^2 + 2^b \cdot x + 2^c = 0,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Să se arate că dacă rădăcinile acestei ecuaţii sunt numere raţionale, atunci $a + c = 2(b - 1)$.

Vasile Pop

Soluţie. Pentru $d \in \mathbb{N}$ suficient de mare numerele $a+d$, $b+d$, $c+d$ sunt naturale. Înmulţind ecuaţia cu 2^d obţinem o ecuaţie echivalentă, deci putem presupune $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Discriminantul ecuaţiei este $\Delta = 2^{2b} - 4 \cdot 2^{a+c}$, care dacă ecuaţia are rădăcini raţionale trebuie să fie pătrat perfect.

Din $\Delta \geq 0$ rezultă $2^{2b} \geq 2^{a+c+2}$, deci $2b \geq a + c + 2$ şi atunci

$$\Delta = 2^{a+c+2}(2^{2b-a-c-2} - 1).$$

Dacă $2b-a-c-2 \neq 0$ atunci pentru ca Δ să fie pătrat perfect trebuie ca $a+c+2$ să fie număr par şi $2^{2b-a-c-2} - 1$ să fie pătrat perfect.
Dar $2b-a-c-2$ este atunci număr par deci numărul $2^{2b-a-c-2}-1 = 2^{2\alpha}-1 = 4^\alpha-1$ este impar de forma $4M - 1$ care nu poate fi pătrat perfect (pătratele numerelor impare sunt de forma $4M + 1$).
Rămâne doar cazul $2b - a - c - 2 = 0$. (În acest caz ecuaţia are rădăcină dublă $x_1 = x_2 = -2^{b-a-1}$).

2. Fie A, B o partiţie a mulţimii numerelor întregi: $\mathbb{Z} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ şi $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel ca $a + A = b + B$.

a) Să se dea exemplu de astfel de partiţie şi de numere a, b.

b) Să se arate că există $c \in \mathbb{Z}^*$ astfel ca $A + c = A$.

(S-a notat $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$).

Vasile Pop

Soluţie. a) $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $a = 1$, $b = 0$.

b) Din $a + A = b + B$ rezultă $B = (a - b) + A = d + A$ şi avem partiţia $\mathbb{Z} = A \cup (d + A)$, $A \cap (d + A) = \emptyset$. Avem implicaţiile:

$$x \in A \Rightarrow x + d \in d + A \Rightarrow x + d \notin A$$

$$x + d \notin A \Rightarrow x + d \in d + A \Rightarrow x + d = d + y,\ y \in A \Rightarrow x = y \in A.$$

În concluzie $x \in A \Leftrightarrow x + d \notin A \Leftrightarrow x + 2d \in A$, astfel că $A = A + 2d \Leftrightarrow A = A + c$, unde $c = 2d = 2(a - b)$.

(A este o reuniune de progresii aritmetice infinite în ambele sensuri, de raţie c: $x \in A \Rightarrow \{x + kc \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset A$).

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu laturile

$$AB = a,\ AD = b,\ AA' = c,$$

diagonalele feţelor $AB' = d_1$, $AC = d_2$, $AD' = d_3$ şi diagonala mare $AC' = d$.

Să se demonstreze inegalităţile:

$$\sqrt{2}(a + b + c) \leq d_1 + d_2 + d_3 \leq \sqrt{6}d.$$

Maria Pop

Soluţie. Inegalităţile se scriu:

$$\sqrt{2}(a + b + c) \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \leq \sqrt{6} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Prin ridicare la pătrat prima inegalitate devine:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + a^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \cdot \sqrt{c^2 + b^2} \geq 2(ab + bc + ca).$$

Folosim inegalitatea

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \ (\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0).$$

Avem:

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + a^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \cdot \sqrt{c^2 + b^2} \\ &\geq \frac{(a + b)(a + c)}{2} + \frac{(b + a)(b + c)}{2} + \frac{(c + a)(c + b)}{2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)}{2}\end{aligned}$$

şi rămâne de arătat că

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)}{2} \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Prin ridicare la pătrat a doua inegalitate devine:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{(b^2 + a^2)(b^2 + c^2)} + \sqrt{c^2 + a^2} \cdot \sqrt{c^2 + b^2} \leq 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dar din inegalitatea mediilor:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \leq \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2}{2}$$

şi cu analoagele membrul stâng este

$$\leq \frac{2a^2+b^2+c^2+2b^2+c^2+a^2+2c^2+a^2+b^2}{2} = 2(a^2+b^2+c^2).$$

Observaţie. • Dacă $\overline{v}_1 = a\overline{i} + b\overline{j}$, $\overline{v}_2 = b\overline{i} + c\overline{j}$, $\overline{v}_3 = c\overline{i} + a\overline{j}$ prima inegalitate este

$$\|\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3\| \leq \|\overline{v}_1\| + \|\overline{v}_2\| + \|\overline{v}_3\| \text{ (inegalitatea triunghiului).}$$

• A doua inegalitate rezultă din inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot 1 + \sqrt{b^2+c^2}\cdot 1 + \sqrt{c^2+a^2}\cdot 1 \leq \sqrt{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2}\cdot\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Să se arate că dacă $MP = \frac{1}{2}(AB+CD)$ şi $NQ = \frac{1}{2}(AD+BC)$ atunci patrulaterul este romb.

Vasile Pop

Soluţie. Vom rezolva problema vectorial. Avem:

$$\overline{MP} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) \text{ şi } \overline{NQ} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{CD})$$

$$(\overline{MP} = \overline{r}_P - \overline{r}_M = \frac{1}{2}(\overline{r}_D + \overline{r}_C) - \frac{1}{2}(\overline{r}_A + \overline{r}_B) = \frac{1}{2}((\overline{r}_D - \overline{r}_A) + (\overline{r}_C - \overline{r}_B) = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}))$$

deci

$$\|\overline{MP}\| = \frac{1}{2}\|\overline{AD} + \overline{BC}\| \leq \frac{1}{2}(\|\overline{AD}\| + \|\overline{BC}\|) = \frac{1}{2}(AD+BC) \tag{1}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă AD şi BC sunt paralele (vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari).

Analog

$$\|\overline{NQ}\| = \frac{1}{2}\|\overline{BA} + \overline{CD}\| \leq \frac{1}{2}(\|\overline{BA}\| + \|\overline{CD}\|) = \frac{1}{2}(AB+CD). \tag{2}$$

Adunând (1) cu (2) obţinem:

$$MP + NQ \leq \frac{1}{2}(AB+CD+AD+BC)$$

şi din ipoteză

$$MP + NQ = \frac{1}{2}(AB+CD+AD+BC),$$

astfel că inegalităţile (1) şi (2) sunt egalităţi, deci $AD \| BC$ şi $AB \| CD$ astfel că patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram şi atunci $MP = AD = BC$ şi $NQ = AB = DC$ şi revenind la relaţiile din ipoteză rezultă $MP = NQ$ deci $AD = BC = AB = CD$ (laturile egale). În concluzie patrulaterul $ABCD$ este romb.