Concursul Interjudeţean de Matematică
"Alexandru Papiu-Ilarian", Ediţia a XVII-a
Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş, 2012
Clasa a IX-a

1. Se consideră ecuaţia de gradul II:

$$2^a \cdot x^2 + 2^b \cdot x + 2^c = 0,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Să se arate că dacă rădăcinile acestei ecuaţii sunt numere raţionale, atunci $a + c = 2(b - 1)$.

2. Fie A, B o partiţie a mulţimii numerelor întregi: $\mathbb{Z} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ şi $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel ca $a + A = b + B$.

a) Să se dea exemplu de astfel de partiţie şi de numere a, b.

b) Să se arate că există $c \in \mathbb{Z}^*$ astfel ca $A + c = A$.

(S-a notat $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$).

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu laturile

$$AB = a,\ AD = b,\ AA' = c,$$

diagonalele feţelor $AB' = d_1$, $AC = d_2$, $AD' = d_3$ şi diagonala mare $AC' = d$.

Să se demonstreze inegalităţile:

$$\sqrt{2}(a + b + c) \leq d_1 + d_2 + d_3 \leq \sqrt{6}d.$$

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Să se arate că dacă $MP = \frac{1}{2}(AB + CD)$ şi $NQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ atunci patrulaterul este romb.