	ROMÂNIA **MINISTRUL EDUCAŢIEI, CERECTĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI** **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ** **Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian"** Târgu Mureş , str. Bernádz György nr. 12 Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498 Email: office@papiu.com www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"Alexandru Papiu Ilarian"
26-27.10.2012
EDITIA a XVII - a
CLASA a VIII - a
SOLUTII SI BAREM DE EVALUARE

ORICE REZOLVARE CORECTA, DIFERITA DE CEA PREZENTATA, SE PUNCTEAZA CU MAXIM.

Subiectul I.

Să se rezolve în mulţimea N ecuaţia:

$$\frac{x^2+2}{2x+1}+\frac{x^2+3}{2x+2}+\frac{x^2+4}{2x+3}+\ldots+\frac{x^2+2011}{2x+2010}+\frac{x^2+2012}{2x+2011}+\frac{x^2+2013}{2x+2012}=2012$$

Solutie

1 punct din oficiu

$$\frac{x^2+k}{2x+(k-1)}-1=\frac{x^2+k-2x-k+1}{2x+(k-1)}=\frac{x^2-2x+1}{2x+(k-1)}=\frac{(x-1)^2}{2x+(k-1)},unde.k=\overline{2,2013}$$ 2 puncte

$$\frac{(x-1)^2}{2x+1}+\frac{(x-1)^2}{2x+2}+\ldots+\frac{(x-1)^2}{2x+2012}=(x-1)^2\cdot\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+2}+\ldots+\frac{1}{2x+2012}\right)=0$$ 3 puncte

$x-1=0$

$x=1$ 1 punct

Subiectul II.

Determinaţi numere $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2011}$ care verifică relaţiile:

$1+a_1^2=2\cdot a_2$; $1+a_2^2=2\cdot a_3$; $1+a_3^2=2\cdot a_4$;…;$1+a_{2010}^2=2\cdot a_{2011}$; $1+a_{2011}^2=2\cdot a_1$

Solutie

1 punct din oficiu

$1+a_1^2=2\cdot a_2$;
$1+a_2^2=2\cdot a_3$;
$1+a_3^2=2\cdot a_4$
……………………………………
$1+a_{2010}^2=2\cdot a_{2011}$;
$1+a_{2011}^2=2\cdot a_1$

Probleme propuse si selectate de prof. Balint Attila Sandor, prof. Danciu Alin Florin, prof. Andreica Gheorghe, prof. Botez Radu, prof. Ginta Vasile

Adunăm şi obţinem:

$1+ a_1^2+1+ a_2^2+1+ a_3^2+\ldots +1+a_{2011}= =2\cdot a_1+2\cdot a_2+2\cdot a_3+2\cdot a_4+\ldots+2\cdot a_{2010}+2\cdot a_{2011} \Rightarrow$ 2 puncte

$\Rightarrow (1-a_1)^2+(1-a_2)^2+\ldots+(1-a_{2011})^2=0$ 3 puncte

$\Rightarrow \quad a_1=a_2=\ldots=a_{2011}=1$ 1 punct

Subiectul III.

Fie triunghiul ABC, G centrul său de greutate, şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$. Dreapta MN trece prin G dacă şi numai dacă : $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=1$

Andrica Dorin, Vacaretu Daniel

Solutie

1 punct din oficiu

Implicaţia directă este următoare : "$G\in MN$ demonstrăm că $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=1$"

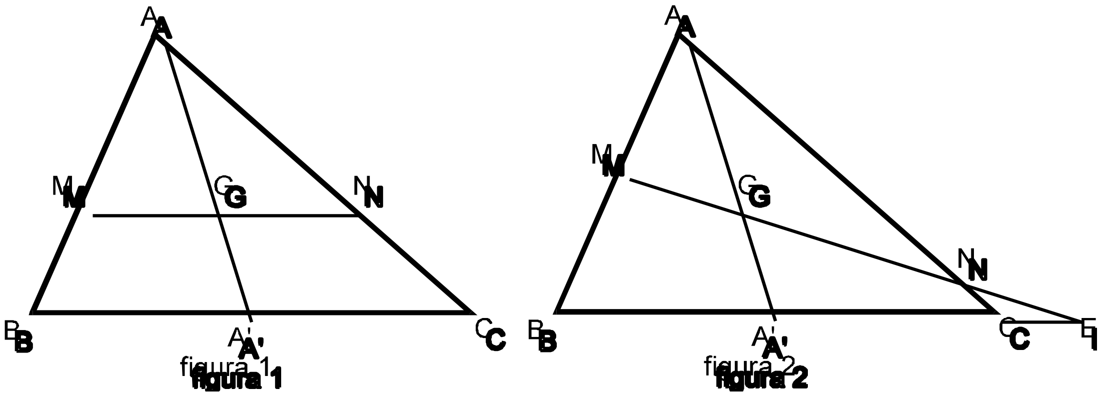

figura 1 figura 2

Presupunem $G\in MN$ şi MN || BC (figura 1). Aplicând teorema lui Thales în triunghiurile ABA' şi AA'C, deducem relaţiile :

$\frac{BM}{AM}=\frac{A'G}{AC}$ şi $\frac{CN}{AN}=\frac{A'G}{AG}$ 1 punct

Cum G este centru de greutate al triunghiului ABC, deducem că :

$\frac{A'G}{AG}=\frac{1}{2}$. Deci,

$\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=\frac{A'G}{AG}+\frac{A'G}{AC}=2\cdot\frac{1}{2}=1, \quad (q.e.d.)$ 1 punct

Presupunem acum $G\in MN$ şi $MN \nparallel BC$ (figura 2).

Aplicând succesiv teorema lui Menelaos pentru triunghiurile ABA' şi AA'C tăiate de transversalele MGE şi respectiv GNE, se deduc relaţiile :

$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BE}{A'E}\cdot\frac{A'G}{GA}=1 \quad (1)$

$\frac{AG}{GA'}\cdot\frac{A'E}{CE}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \quad (2)$ 1 punct

Probleme propuse si selectate de prof. Balint Attila Sandor, prof. Danciu Alin Florin, prof. Andreica Gheorghe, prof. Botez Radu, prof. Ginta Vasile

Din relaţia (1) deducem că MB/MA=1/2·BE/A'E,

iar din relaţia (2) deducem că NC/NA=1/2·CE/A'E (am ţinut seama că G este centrul de greutate al ΔABC).

Cum BE=BC+CE şi A'E=BC/2+CE, relaţia de mai sus devine :

$$\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC+2\cdot CE}{\frac{BC}{2}+CE}\Leftrightarrow\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC+2\cdot CE}{\frac{BC+2\cdot CE}{2}}\Leftrightarrow$$

1 punct

$$\Leftrightarrow\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=\frac{1}{2}\cdot(BC+2\cdot CE)\cdot\frac{2}{BC+2\cdot CE}$$

După simplificare deducem că MB/MA+NC/NA=1, (q.e.d.)

Implicaţia reciprocă este următoare : " MB/MA+NC/NA=1, demonstrăm că G∈MN"

Vom demonstra acest fapt prin reducere la absurd. Presupunem că G∉MN. Atunci există M'∈(AB) astfel încât punctele M', G şi N să fie coliniare. Conform implicaţiei directe deducem relaţia :

$$\frac{M'B}{M'A}+\frac{NC}{NA}=1$$

Dar, $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=1$

Din cele două relaţii, egalându-le, deducem :

$$\frac{M'B}{M'A}+\frac{NC}{NA}=\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}$$

1 punct

Reducând termenii asemenea se obţine M'B/M'A=MB/MA, deci M'=M. Contradicţie.

Deci punctele M, G şi N sunt coliniare (q.e.d.).

1 punct

Subiectul IV.

Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată. $AM\perp SB$, $M\in SB, BN\perp SC, N\in SC,\ CP\perp SD,\ P\in SD, DQ\perp SA,\ Q\in SA$ şi R simetricul lui N faţă de AC.

a) Demonstraţi că punctele B, R, Q, D sunt coplanare.

b) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele MP şi RQ.

Gazeta matematică 2012

Solutie

1 punct din oficiu

a)

Din congruenţa triunghiurilor BNC şi DQA (cazul de congruenţă I.U.) avem [AQ]≡[NC], iar din congruenţa triunghiurilor CNT şi CRT (cazul de congruenţă C.C), unde {T}=NR∩AC avem [CN]≡[CR], rezultă că $[AQ]\equiv[CR]$ (1)

1 punct

Din congruenţa triunghiurilor ANT şi ART (cazul de congruenţă C.C.) avem [AN]≡[AR], iar din congruenţa triunghiurilor ANC şi CQA (cazul de congruenţă L.U.L), avem [AN]≡[CQ], rezultă că $[AR]\equiv[CQ]$ (2)

1 punct

Din (1) şi (2) ⇒ ARCQ paralelogram ⇒ AC∩RQ={O} (3). Dar, AC∩BD={O} $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ BD∩RQ={O} ⇒ B, R, Q, D coplanare

1 punct

b)

MP|| BD ⇒ $m(\widehat{MP,QR})=m(\widehat{BD,QR})$

1 punct

Din a) avem BQDR paralelogram, cu [BQ]≡[DQ] (din congruenţa triunghiurilor DQA şi BQA, cazul de congruenţă L.U.L) ⇒ BQDR romb

1 punct

⇒ BD⊥QR ⇒$m(\widehat{BD,QR})=90°$

1 punct

Probleme propuse si selectate de prof. Balint Attila Sandor, prof. Danciu Alin Florin, prof. Andreica Gheorghe, prof. Botez Radu, prof. Ginta Vasile