Concursul Interjudeţean de Matematică
"Alexandru Papiu-Ilarian", Ediţia a XVII-a
Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş, 2012
Clasa a X-a

1. Fie x, y, a, b numere raţionale, n un număr natural.
a) Să se arate că dacă $(x+y\sqrt{3})^n = a+b\sqrt{3}$ atunci

$$(x-y\sqrt{3})^n = a-b\sqrt{3}.$$

b) Să se arate că pentru orice numere raţionale x, y, z, t şi orice numere naturale m, n

$$(x+y\sqrt{3})^{2m} + (z+t\sqrt{3})^{2n} \neq 2012 + 1202\sqrt{3}.$$

c) Să se arate că $(9+5\sqrt{3})^m \neq (15+8\sqrt{3})^n$ pentru orice numere naturale nenule m şi n.

2. Aflaţi toate numerele naturale $n \geq 2$ pentru care numărul

$$A = \sqrt[n]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[n]{26-15\sqrt{3}}$$

este întreg.

3. Fie $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie cu proprietăţile:
1) $f(x,x) = x^2,\ \forall\, x \in \mathbb{N}^*$;
2) $f(x,y) = f(y,x),\ \forall\, x,y \in \mathbb{N}^*$;
3) $f(x+y,y) = f(x,y),\ \forall\, x,y \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se arate că $f(x,y)$ este pătrat perfect pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se determine funcţiile f care au proprietăţile 1), 2), 3).

4. Fie $A, B, C \in (0,\pi)$ unghiurile unui triunghi. Să se demonstreze inegalităţile:

$$\frac{\pi}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \leq A\sin A + B\sin B + C\sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

1. Fie x, y, a, b numere raţionale, n un număr natural.

a) Să se arate că dacă $(x + y\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$ atunci

$$(x - y\sqrt{3})^n = a - b\sqrt{3}.$$

b) Să se arate că pentru orice numere raţionale x, y, z, t şi orice numere naturale m, n

$$(x + y\sqrt{3})^{2m} + (z + t\sqrt{3})^{2n} \neq 2012 + 1202\sqrt{3}.$$

c) Să se arate că $(9+5\sqrt{3})^m \neq (15+8\sqrt{3})^n$ pentru orice numere naturale nenule m şi n.

Vasile Pop

Soluţie. a) În produsul $(x + y\sqrt{3})^n = (x + y\sqrt{3})(x + y\sqrt{3}) \ldots (x + y\sqrt{3})$ apar doar termeni de forma

$$x^{n-k}(y\sqrt{3})^k = x^{n-k}y^k(\sqrt{3})^k.$$

Pentru k număr par termenul este raţional iar pentru k număr impar termenul este de forma $u\sqrt{3}$, $u \in \mathbb{Q}$. În produsul $(x - y\sqrt{3})^n$ în loc de $x^{n-k}y^k(\sqrt{3})^k$ apare $x^{n-k}(-y)^k\sqrt{3}$, adică la fel pentru k număr par şi de semn schimbat pentru k impar. Astfel că $(x + y\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$, unde a este suma termenilor de grade pare pentru $\sqrt{3}$ iar b este suma termenilor de grade impare pentru $\sqrt{3}$. Rezultă că

$$(x - y\sqrt{3})^n = a - b\sqrt{3}.$$

b) Dacă $(x+y\sqrt{3})^{2m} = a+b\sqrt{3}$ şi $(z+t\sqrt{3})^{2n} = c+d\sqrt{3}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ atunci:

$$(x - y\sqrt{3})^{2m} + (z - t\sqrt{3})^{2n} = (a + c) - (b + d)\sqrt{3},$$

deci $a + c = 2012$ şi $b + d = 1202$. Deoarece $2012 - 1202\sqrt{3} < 0$ ultima relaţie este falsă.

c) Dacă $(9 + 5\sqrt{3})^m = a + b\sqrt{3}$ atunci $(9 - 5\sqrt{3})^m = a - b\sqrt{3}$.

Din $(9 + 5\sqrt{3})^m = (15 + 8\sqrt{3})^n$ rezultă

$$(9 - 5\sqrt{3})^m = (15 - 8\sqrt{3})^n$$

şi prin înmulţirea lor rezultă $6^m = 33^n$, care este imposibilă (în stânga avem număr par iar în dreapta avem număr impar).

2. Aflaţi toate numerele naturale $n \geq 2$ pentru care numărul

$$A = \sqrt[n]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[n]{26 - 15\sqrt{3}}$$

este întreg.

Dorel Miheţ, Timişoara

Soluţie

Dacă $n = 2$, atunci $A = \sqrt{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt{26 - 15\sqrt{3}}$.

Deoarece $A^2 = 52 - 2 = 50$, numărul A nu este natural.

Pentru $n = 3$,

$$A = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}.$$

Ţinând seama de formula $(u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$ obţinem că $A^3 = 52+3A$, adică $(A-4)(A^2+4A+13) = 0$, de unde rezultă $A = 4$.

În continuare arătăm că dacă $n \geq 4$ atunci $A \notin \mathbb{Z}$.

Într-adevăr, ţinând seama de faptul că dacă $a \in \mathbb{R}, a > 1$, atunci funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a^x + a^{-x}$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ (dacă x, y sunt numere pozitive astfel încât $x > y$, atunci $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{a^x-a^y}{x-y} \cdot (1 - \frac{1}{a^x a^y}) > 0$), rezultă că $n \geq 4$ implică $A < 4$. Deci dacă A este întreg, atunci A este 2 sau 3.

Dacă $A = 2$, atunci $\sqrt[n]{26 + 15\sqrt{3}}$, $\sqrt[n]{26 - 15\sqrt{3}}$ atunci sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2x + 1 = 0$, absurd.

Dacă $A = 3$, atunci $\sqrt[n]{26 + 15\sqrt{3}}$, $\sqrt[n]{26 - 15\sqrt{3}}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 1 = 0$, deci $\sqrt[n]{26 + 15\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, adică

$$2^n(26 + 15\sqrt{3}) = (3 + \sqrt{5})^n.$$

Se demonstrează imediat prin inducţie că $(3+\sqrt{5})^n$ este un număr de forma $a+b\sqrt{5}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$, deci egalitatea $2^n(26 + 15\sqrt{3}) = (3 + \sqrt{5})^n$ conduce la o egalitate de forma $c + d\sqrt{3} = a + b\sqrt{5}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ şi $b \cdot d \neq 0$.

Această egalitate este însă imposibilă, deoarece din ea rezultă $\sqrt{15} = \frac{3d^2+5b^2-(c-a)^2}{2bd}$, absurd.

Prin urmare A este întreg doar pentru $n = 3$.

3. Fie $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie cu proprietăţile:

1) $f(x,x) = x^2,\ \forall\ x \in \mathbb{N}^*$;

2) $f(x,y) = f(y,x),\ \forall\ x, y \in \mathbb{N}^*$;

3) $f(x+y, y) = f(x,y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $f(x,y)$ este pătrat perfect pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se determine funcţiile f care au proprietăţile 1), 2), 3).

Vasile Pop

Soluţie. a) Vom demonstra prin inducţie după $n = x + y$ că $f(x,y)$ este pătrat perfect.

Pentru $n = 2$ avem $(x,y) = (1,1)$ şi $f(1,1) = 1^2 = 1$ care este pătrat perfect.

Pentru $n = 3$ avem $(x, y) = (1, 2)$ sau $(x, y) = (2, 1)$.

Conform 3) avem $f(2, 1) = f(1 + 1, 1) = f(1, 1) = 1$ şi din 2) avem $f(1, 2) = 1$, ambele fiind pătrate perfecte.

Presupunem că pentru orice (x, y) cu $x + y \leq n$, $f(x, y)$ este pătrat perfect şi vom arăta că dacă $x+y = n+1$ atunci şi $f(x, y)$ este pătrat perfect. Datorită relaţiei $f(x, y) = f(y, x)$ putem presupune $x > y$ şi cum $y \geq 1$ rezultă $x \leq n$. Astfel avem:

$$f(x, y) = f((x - y) + y, y) \overset{2)}{=} f(x - y, y).$$

Acum conform ipotezei de inducţie deoarece $(x-y)+y = x \leq n$ rezultă că $f(x-y, y)$ este pătrat perfect, deci $f(x, y)$ este pătrat perfect.

b) La fel ca la punctul a) se arată că funcţia f este unică: pornind de la $f(1, 1) = 1$ obţinem $f(1, 2)$ şi $f(2, 1)$ şi inductiv dacă am determinat $f(x, y)$ pentru $x + y \leq n$ determinăm în mod unic $f(x, y)$ cu $x + y = n + 1$.

Se observă că funcţia $f(x, y) = (x, y)^2$, unde (x, y) este c.m.m.d.c. al numerelor x şi y, verifică condiţiile 1), 2), 3) deci aceasta este singură.

4. Fie $A, B, C \in (0, \pi)$ unghiurile unui triunghi. Să se demonstreze inegalităţile:

$$\frac{\pi}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \leq A \sin A + B \sin B + C \sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Vasile Pop

Soluţie. Dacă $A \leq B \leq C$ atunci $\sin A \leq \sin B \leq \sin C$
$(a = 2R \sin A,\ A \leq B \leq C \Leftrightarrow a \leq b \leq c)$.

Din inegalitatea lui Cebâşev:

$$\frac{A \sin A + B \sin B + C \sin C}{3} \geq \frac{A + B + C}{3} \cdot \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}$$

şi s-a obţinut prima inegalitate.

Din inegalitatea Cauchy-Schwarz avem:

$$A \sin A + B \sin B + C \sin C \leq \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}.$$

Rămâne de arătat că $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$$4(1 - \cos^2 A) + 2(1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C) \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$-4 \cos^2 A - 2(\cos 2B + \cos 2C) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$4 \cos^2 A + 4 \cos(B - C) \cos(B + C) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \cos^2 A - 4 \cos(B - C) \cos A + 1 \geq 0.$$

Avem:

$$\Delta = 4\cos^2(B-C) - 4 \leq 0 \Rightarrow 4t^2 - 4\cos(B-C)t + 1 \geq 0$$

pentru orice t.

Observaţie. Prima inegalitate

$$(A+B+C)(\sin A + \sin B + \sin C) \leq 3A\sin A + 3B\sin B + 3C\sin C \Leftrightarrow$$

$$B\sin A + C\sin A + A\sin B + C\sin B + A\sin C + B\sin C$$

$$\leq 2A\sin A + 2B\sin B + 2C\sin C$$

$$\sin A(B-A) + \sin B(A-B) + \sin C(A-C) + \sin A(C-A)$$

$$+\sin B(C-B) + \sin C(B-C) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sin A - \sin B)(A-B) + (\sin B - \sin C)(B-C) + (\sin C - \sin A)(C-0) \geq 0.$$

Observaţie. Cebâşev: $\dfrac{\sum a_i b_i}{n} \leq \dfrac{\sum a_i}{n} \cdot \dfrac{\sum b_i}{n}$ dacă $a_1, \ldots, a_n$ sunt la fel ordonate cu $b_1, \ldots, b_n$ ($a_1 \leq \ldots \leq a_n$ şi $b_1 \leq \ldots \leq b_n$)

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.$$