Concursul Interjudeţean de Matematică
"Alexandru Papiu-Ilarian", Ediţia a XVII-a
Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş, 2012
Clasa a X-a

1. Fie x, y, a, b numere raţionale, n un număr natural.
a) Să se arate că dacă $(x + y\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$ atunci

$$(x - y\sqrt{3})^n = a - b\sqrt{3}.$$

b) Să se arate că pentru orice numere raţionale x, y, z, t şi orice numere naturale m, n

$$(x + y\sqrt{3})^{2m} + (z + t\sqrt{3})^{2n} \neq 2012 + 1202\sqrt{3}.$$

c) Să se arate că $(9+5\sqrt{3})^m \neq (15+8\sqrt{3})^n$ pentru orice numere naturale nenule m şi n.

2. Aflaţi toate numerele naturale $n \geq 2$ pentru care numărul

$$A = \sqrt[n]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[n]{26 - 15\sqrt{3}}$$

este întreg.

3. Fie $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie cu proprietăţile:
1) $f(x, x) = x^2, \ \forall\, x \in \mathbb{N}^*$;
2) $f(x, y) = f(y, x), \ \forall\, x, y \in \mathbb{N}^*$;
3) $f(x + y, y) = f(x, y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se arate că $f(x, y)$ este pătrat perfect pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se determine funcţiile f care au proprietăţile 1), 2), 3).

4. Fie $A, B, C \in (0, \pi)$ unghiurile unui triunghi. Să se demonstreze inegalităţile:

$$\frac{\pi}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \leq A \sin A + B \sin B + C \sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$