Concursul Interjudeţean de Matematică
"Alexandru Papiu-Ilarian", Ediţia a XVII-a
Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş, 2012
Clasa a XI-a

1. Se consideră şirul lui Fibonacci $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $F(0)=0$, $F(1)=1$ şi

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1),\ \forall\ n\geq 1$$

şi matricea $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că

$$A^n=(-1)^n\begin{bmatrix} F(n-1) & -F(n) \\ -F(n) & F(n+1) \end{bmatrix},\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

b) Să se demonstreze relaţia:

$$F(F(n+2))=F(F(n)+1)F(F(n+1))+F(F(n))F(F(n+1)-1),\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

2. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $\det A=1$. Să se arate că

$$\det(A^2+A-I_2)+\det(A^2+I_2)=5.$$

3. Se consideră şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$x_{n+1}=-x_n+4y_n-z_n,\quad y_{n+1}=-x_n+3y_n-z_n,\quad z_{n+1}=-x_n+y_n-z_n,\ \forall\ n\geq 0,$$

$$x_0=0,\quad y_0=1,\quad z_0=2.$$

Să se arate că şirul $(u_n)_n$, $u_n=\dfrac{x_n}{y_n}$, $n\geq 0$ este format din două subşiruri monotone şi mărginite.

4. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale şi considerăm subşirurile: $(y_n)_n$, $(z_n)_n$, $(t_n)_n$, $(u_n)_n$ definite prin

$$y_n=x_{2n},\quad z_n=x_{3n},\quad t_n=x_{3n+1},\quad u_n=x_{3n+2},\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

a) Să se arate că dacă cele patru subşiruri sunt convergente atunci şirul $(x_n)_n$ este convergent.

b) Să se decidă dacă convergenţa a trei dintre subşiruri asigură convergenţa şirului $(x_n)_n$.

1. Se consideră şirul lui Fibonacci $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $F(0)=0$, $F(1)=1$ şi

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1),\ \forall\ n\geq 1$$

şi matricea $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că

$$A^n=(-1)^n\begin{bmatrix} F(n-1) & -F(n) \\ -F(n) & F(n+1) \end{bmatrix},\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

b) Să se demonstreze relaţia:

$$F(F(n+2))=F(F(n)+1)F(F(n+1))+F(F(n))F(F(n+1)-1),\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Vasile Pop

Soluţie. a) Matricea A verifică relaţia (Teorema Cayley-Hamilton)

$$A^2+A-I_2=0,\quad \text{deci}\quad A^{n+1}=-A^n+A^{n-1},\ \forall\ n\geq 1.$$

Prin inducţie: pentru $n=1$,

$$A=(-1)\begin{bmatrix} F(0) & -F(1) \\ -F(1) & F(2) \end{bmatrix}.$$

Trecerea la $n+1$ se face astfel:

$$A^{n+1}=-A^n+A^{n-1}$$

$$=-(-1)^n\begin{bmatrix} F(n-1) & -F(n) \\ -F(n) & F(n+1) \end{bmatrix}+(-1)^{n-1}\begin{bmatrix} F(n-2) & -F(n-1) \\ -F(n-1) & F(n) \end{bmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\begin{bmatrix} F(n-1)+F(n-2) & -(F(n)+F(n-1)) \\ -(F(n)+F(n-1)) & F(n+1)+F(n) \end{bmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\begin{bmatrix} F(n) & -F(n+1) \\ -F(n+1) & F(n+2) \end{bmatrix}.$$

b) Avem $A^{F(n+2)}=A^{F(n+1)}\cdot A^{F(n)}\Leftrightarrow$

$$(-1)^{F(n+2)}\begin{bmatrix} F(F(n+2)-1) & -F(F(n+2)) \\ -F(F(n+2)) & F(F(n+2)+1) \end{bmatrix}$$

$$=(-1)^{F(n+1)+F(n)}\begin{bmatrix} F(F(n+1)-1) & -F(F(n+1)) \\ -F(F(n+1)) & F(F(n+1)+1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F(F(n)-1) & -F(F(n)) \\ -F(F(n)) & F(F(n)+1) \end{bmatrix}$$

Egalitatea de pe poziţia (1,2) este chiar egalitatea cerută.

Observaţie. Din $A^{p+q} = A^p \cdot A^q$ obţinem

$$F(p+q) = F(p+1)F(q) + F(p)F(q-1)$$

şi se ia $p = F(n)$, $q = F(n+1)$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $\det A = 1$. Să se arate că

$$\det(A^2 + A - I_2) + \det(A^2 + I_2) = 5.$$

Vasile Pop

Soluţie. Fie

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc,$$

polinomul caracteristic al matricei A.

Avem $\det A = ad - bc = 1$ şi notăm cu $t = a + d$ (urma matricei A), deci

$$f_A(x) = x^2 - tx + 1.$$

Se verifică (este cunoscută) relaţia:

$$A^2 - tA + I_2 = 0$$

şi atunci avem:

$$A^2 + A - I_2 = (t+1)A - 2I_2 \quad \text{şi} \quad A^2 + I_2 = tA.$$

$$\det(A^2 + A - I_2) = \det\left((t+1)\left(A - \frac{2}{t+1}I_2\right)\right) = (t+1)^2 f_A\left(\frac{2}{t+1}\right) = -t^2 + r$$

şi

$$\det(A^2 + I_2) = \det(tA) = t^2 \det A = t^2$$

şi evident $-t^2 + 5 + t^2 = 5$.

3. Se consideră şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$x_{n+1} = -x_n + 4y_n - z_n, \quad y_{n+1} = -x_n + 3y_n - z_n, \quad z_{n+1} = -x_n + y_n - z_n, \ \forall\, n \geq 0,$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 2.$$

Să se arate că şirul $(u_n)_n$, $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$, $n \geq 0$ este format din două subşiruri monotone şi mărginite.

Vasile Pop

Soluţie. Din recurenţă obţinem relaţia

$$z_{n+1} = 3y_{n+1} - 2x_{n+1} \quad \text{sau} \quad z_n = 3y_n - 2x_n.$$

Înlocuind în primele două obţinem:

$$x_{n+1} = x_n + y_n \quad \text{şi} \quad y_{n+1} = x_n, \ \forall\ n \geq 0,$$

pe care dacă le împărţim obţinem pentru şirul $(u_n)_n$ relaţia de recurenţă

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}, \ n \geq 0.$$

Prin calcul găsim

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{3}{2}, \quad u_3 = \frac{5}{3}, \quad u_4 = \frac{8}{5}, \quad u_5 = \frac{13}{8},$$

din care se observă că şirul $(u_n)_n$ nu este monoton dar avem:

$$u_0 < u_2 < u_4, \quad u_1 > u_3 > u_5$$

din care bănuim că şirul termenilor pari $(u_{2n})_n$ este crescător şi şirul termenilor impari $(u_{2n+1})_n$ este descrescător.

Pentru demonstraţie avem nevoie de o relaţie din doi în doi (u_{n+1} în funcţie de u_{n-1}).

Avem:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{u_{n-1}}} = \frac{2u_{n-1} + 1}{u_{n-1} + 1} = 2 - \frac{1}{u_{n-1} + 1}.$$

Pentru monotonie observăm că:

$$u_{n+3} - u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1} + 1} - 2 + \frac{1}{u_{n-1} + 1} = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{(u_{n+1} + 1)(u_{n-1} + 1)}$$

şi cum $u_n > 0$, $\forall\ n \geq 1$ diferenţele $u_{n+3} - u_{n+1}$ şi $u_{n+1} - u_{n-1}$ au acelaşi semn. Deoarece $u_2 - u_0 > 0$ obţinem $u_{2n+2} - u_{2n} > 0$, deci şirul $(u_{2n})_n$ este strict crescător şi deoarece $u_3 - u_1 < 0$ obţinem: $u_{2n+1} - u_{2n-1} < 0$ deci şirul $(u_{2n+1})_n$ este strict descrescător. Evident că şirul $(u_{2n+1})_n$ este mărginit (cu termeni pozitivi). Rămâne de arătat că şirul $(u_{2n})_n$ este mărginit. Din relaţia $u_{2n+2} = 2 - \dfrac{1}{u_{2n} + 1}$ şi din $u_{2n+2} > u_{2n} \Leftrightarrow (u_{2n})^2 - u_{2n} - 1 < 0$ rezultă $u_{2n} \in \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$, deci şirul este mărginit (între rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$).

4. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale şi considerăm subşirurile: $(y_n)_n$, $(z_n)_n$, $(t_n)_n$, $(u_n)_n$ definite prin

$$y_n = x_{2n}, \quad z_n = x_{3n}, \quad t_n = x_{3n+1}, \quad u_n = x_{3n+2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

a) Să se arate că dacă cele patru subşiruri sunt convergente atunci şirul $(x_n)_n$ este convergent.

b) Să se decidă dacă convergenţa a trei dintre subşiruri asigură convergenţa şirului $(x_n)_n$.

Vasile Pop

Soluţie. a) Notăm cu y, z, t, u limitele subşirurilor.

Considerăm subşirul $(x_{6n})_n$, care este în acelaşi timp subşir în şirul $(y_n)_n$ şi subşir în şirul $(z_n)_n$, deci el este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = y, \quad \lim_{n\to\infty} x_{6n} = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = z, \quad \text{deci} \quad y = z.$$

Considerăm subşirul $(x_{6n+2})_n$ şi obţinem $y = t$.

Considerăm subşirul $(x_{6n+4})_n$ şi obţinem $y = u$.

În concluzie $y = z = t = u$ şi cum subşirurile $(z_n)_n$, $(t_n)_n$, $(u_n)_n$ acoperă tot şirul $(x_n)_n$ rezultă că şirul $(x_n)_n$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \ \text{unde } x = y = z = t = u.$$

b) Arătăm că convergenţa a oricare trei din subşiruri nu asigură convergenţa şirului $(x_n)_n$ şi pentru aceasta vom da contraexemple:

b1) Dacă $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ şi $(t_n)_n$ sunt convergente luăm şirul $(x_n)_n$ definit astfel:

$$x_{6n} = x_{6n+1} = x_{6n+2} = x_{6n+3} = x_{6n+4} = 0$$

şi $x_{6n+5} = 1$ (evident divergent) şi

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0 = \lim_{n\to\infty} t_n = 0.$$

b2) Dacă $(x_{2n})_n$, $(x_{3n})_n$ şi $(x_{3n+2})_n$ sunt convergente luăm:

$$x_{6n} = x_{6n+2} = x_{6n+3} = x_{6n+4} = x_{6n+5} = 0 \quad \text{şi} \quad x_{6n+1} = 1$$

şu avem

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

b3) Dacă $(x_{2n})_n$, $(x_{3n+1})_n$, $(x_{3n+2})_n$ sunt convergente luăm:

$$x_{6n} = x_{6n+1} = x_{6n+2} = x_{6n+4} = x_{6n+5} = 0 \quad \text{şi} \quad x_{6n+3} = 1$$

şi avem

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} x_{3n+2} = 0.$$

b4) Dacă $(x_{3n})_n$, $(x_{3n+1})_n$, $(x_{3n+2})_n$ sunt convergente luăm:

$$x_{3n} = 0, \quad x_{3n+1} = 1, \quad x_{3n+1} = 2$$

şi avem:

$$\lim_{n\to\infty} x_{3n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_{3n+1} = 1 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} x_{3n+2} = 2,$$

dar evident că şirul $(x_n)_n$ nu este convergent.