Concursul Interjudeţean de Matematică
"Alexandru Papiu-Ilarian", Ediţia a XVII-a
Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş, 2012
Clasa a XI-a

1. Se consideră şirul lui Fibonacci $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $F(0)=0$, $F(1)=1$ şi

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1),\ \forall\ n\geq 1$$

şi matricea $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că

$$A^n=(-1)^n\begin{bmatrix} F(n-1) & -F(n) \\ -F(n) & F(n+1) \end{bmatrix},\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

b) Să se demonstreze relaţia:

$$F(F(n+2))=F(F(n)+1)F(F(n+1))+F(F(n))F(F(n+1)-1),\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

2. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $\det A=1$. Să se arate că

$$\det(A^2+A-I_2)+\det(A^2+I_2)=5.$$

3. Se consideră şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$x_{n+1}=-x_n+4y_n-z_n,\quad y_{n+1}=-x_n+3y_n-z_n,\quad z_{n+1}=-x_n+y_n-z_n,\ \forall\ n\geq 0,$$

$$x_0=0,\quad y_0=1,\quad z_0=2.$$

Să se arate că şirul $(u_n)_n$, $u_n=\dfrac{x_n}{y_n}$, $n\geq 0$ este format din două subşiruri monotone şi mărginite.

4. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale şi considerăm subşirurile: $(y_n)_n$, $(z_n)_n$, $(t_n)_n$, $(u_n)_n$ definite prin

$$y_n=x_{2n},\quad z_n=x_{3n},\quad t_n=x_{3n+1},\quad u_n=x_{3n+2},\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

a) Să se arate că dacă cele patru subşiruri sunt convergente atunci şirul $(x_n)_n$ este convergent.

b) Să se decidă dacă convergenţa a trei dintre subşiruri asigură convergenţa şirului $(x_n)_n$.