**Concursul Interjudeţean de Matematică**
**"Alexandru Papiu-Ilarian", Ediţia a XVII-a**
**Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş, 2012**
**Clasa a XII-a**

**1.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel ca derivata sa să fie funcţie periodică şi fie $F$ o primitivă a funcţiei $f$. Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - ax^2 - bx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, să fie funcţie periodică.

**2.** Să se determine legile de compoziţie $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ pentru care $([0,1], *)$ este monoid comutativ cu elementul neutru $e = 1$ şi care mai verifică una din condiţiile:

a) $(x \cdot y) * (x \cdot z) = x \cdot (y * z),\ \forall\, x, y, z \in [0,1]$;

b) $(x \cdot y) * (x \cdot z) = x^2 \cdot (y * z),\ \forall\, x, y, z \in [0,1]$;

c) $(x \cdot y) * (x \cdot z) = x^3 \cdot (y * z),\ \forall\, x, y, z \in [0,1]$.

**3.** Aflaţi toate funcţiile $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) $f$ este derivabilă pe $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

ii) Există o primitivă $F$ a lui $f$ astfel încât $F(-\frac{\pi}{2}) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$ şi $F(x) + f'(x) \leq 0\ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

**4.** Fie $G$ o mulţime nevidă şi $f : G^4 \to G$ o funcţie cu proprietăţile:

1) $f(x, y, y, y) = f(y, y, y, x) = x,\ \forall\, x, y \in G$;

2) $f(f(x_1, x_2, x_3, x_4), f(y_1, y_2, y_3, y_4), f(z_1, z_2, z_3, z_4), f(t_1, t_2, t_3, t_4))$
$= f(f(x_1, y_1, z_1, t_1), f(x_2, y_2, z_2, t_2), f(x_3, y_3, z_3, t_3), f(x_4, y_4, z_4, t_4))$.

Pe $G$ se defineşte legea de compoziţie internă:

$$x * y = f(x, a, a, y),\ \forall\, x, y \in G,$$

unde $a \in G$ este un element fixat.

Să se decidă dacă legea este:

a) comutativă;

b) asociativă;

c) admite element neutru.

**1.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel ca derivata sa să fie funcţie periodică şi fie $F$ o primitivă a funcţiei $f$. Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - ax^2 - bx$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, să fie funcţie periodică.

Vasile Pop

**Soluţie.** Fie $T > 0$ perioada derivatei $f'$. Avem:

$$(f(x+T) - f(x))' = f'(x+T) - f'(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

deci există $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x+T) - f(x) = c,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Avem

$$(F(x+T) - F(x))' = f(x+T) - f(x) = c,\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

deci există $d \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$F(x+T) - F(x) = cx + d,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Scriem ultima relaţie sub forma:

$$F(x+T) - a(X+T)^2 - b(x+T) = F(x) - ax^2 - bx,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

unde $a = \dfrac{c}{T}$, $b = \dfrac{d - aT^2}{T}$.

Funcţia $G(x) = F(x) - ax^2 - bx$, $x \in \mathbb{R}$, este periodică de perioadă $T$.

**2.** Să se determine legile de compoziţie $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ pentru care $([0,1], *)$ este monoid comutativ cu elementul neutru $e = 1$ şi care mai verifică una din condiţiile:

a) $(x \cdot y) * (x \cdot z) = x \cdot (y * z),\ \forall\ x, y, z \in [0,1]$;

b) $(x \cdot y) * (x \cdot z) = x^2 \cdot (y * z),\ \forall\ x, y, z \in [0,1]$;

c) $(x \cdot y) * (x \cdot z) = x^3 \cdot (y * z),\ \forall\ x, y, z \in [0,1]$.

Vasile Pop

**Soluţie.** Avem:

$$1 * x = x * 1 = x,\ \forall\ x \in [0,1],$$

în particular $1 * 0 = 0$.

$$x * 0 = (x \cdot 1) * (x \cdot 0) = x^k \cdot (1 * 0) = 0,\ \forall\ x \in [0,1].$$

Rămâne să determinăm $x * y$ pentru $x, y \in (0,1)$.

Fie $0 < x \le y < 1$.

Avem

$$x * y = \left(y \cdot \frac{x}{y}\right) * (y \cdot 1) = y^k \cdot \left(\frac{x}{y} * 1\right) = y^k \cdot \frac{x}{y} = x \cdot y^{k-1},$$

deci
$$x * y = \min(x, y) \cdot (\max(x, y))^{k-1}.$$

a) Pentru $k = 1$ obţinem legea de compoziţie $x * y = \min(x, y)$ care determină pe $[0, 1]$ o structură de monoid comutativ cu elementul neutru $e = 1$.

b) Pentru $k = 2$ obţinem legea de compoziţie $x * y = x \cdot y$ care determină pe $[0, 1]$ o structură de monoid comutativ cu elementul neutru $e = 1$.

c) Pentru $k = 3$ obţinem legea de compoziţie
$$x * y = \min(x, y) \cdot (\max(x, y))^2 = x \cdot y \cdot \max(x, y).$$

Această lege nu este asociativă:
$$\left(\frac{1}{4} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^2}\right) * \frac{1}{2} = \frac{1}{36} * \frac{1}{2} = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9 \cdot 16}$$
$$\frac{1}{4} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16}$$
şi se vede că rezultatele sunt diferite. Astfel că în cazul c) nu avem astfel de legi de compoziţie.

**3.** Aflaţi toate funcţiile $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) $f$ este derivabilă pe $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

ii) Există o primitivă $F$ a lui $f$ astfel încât $F(-\frac{\pi}{2}) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$ şi
$F(x) + f'(x) \leq 0\ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Dorel Miheţ, Timişoara

**Soluţie**

Funcţiile $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, pentru care $F(x) = a \cdot cosx \quad (a \in \mathbb{R})$ satisfac condiţiile din enunţ. Arătăm că acestea sunt funcţiile căutate.

Pentru aceasta demonstrăm că funcţia $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{F(x)}{cosx}$ este constantă.

Într-adevăr, avem
$$g'(x) = \frac{f(x)cosx + F(x)sinx}{cos^2x}.$$

Considerăm funcţia $h : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, h(x) = f(x)cosx + F(x)sinx$. Ea are derivata
$$h'(x) = f'(x)cosx - f(x)sinx + f(x)sinx + F(x)cosx = cosx(f'(x) + F(x)),$$
deci $h'(x) \leq 0\ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Rezultă că $h$ este descrescătoare pe $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. În plus, din $F(-\frac{\pi}{2}) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$ avem că $h(-\frac{\pi}{2}) = h(\frac{\pi}{2}) = 0$, de unde deducem că

$$h(x) = 0 \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Prin urmare $g$ are derivata nulă pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, deci există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = a \cdot cosx$ pentru orice $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Deoarece $F(-\frac{\pi}{2}) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$, egalitatea $F(x) = a \cdot cosx$ are loc si pentru $x = \pm\frac{\pi}{2}$, deci

$$F(x) = a \cdot cosx \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Funcţiile căutate sunt aşadar cele de forma $f(x) = a \cdot sinx$, unde $a \in \mathbb{R}$.

**4.** Fie $G$ o mulţime nevidă şi $f : G^4 \to G$ o funcţie cu proprietăţile:

1) $f(x, y, y, y) = f(y, y, y, x) = x, \ \forall \ x, y \in G$;

2) $f(f(x_1, x_2, x_3, x_4), f(y_1, y_2, y_3, y_4), f(z_1, z_2, z_3, z_4), f(t_1, t_2, t_3, t_4))$
$= f(f(x_1, y_1, z_1, t_1), f(x_2, y_2, z_2, t_2), f(x_3, y_3, z_3, t_3), f(x_4, y_4, z_4, t_4))$.

Pe $G$ se defineşte legea de compoziţie internă:

$$x * y = f(x, a, a, y), \ \forall \ x, y \in G,$$

unde $a \in G$ este un element fixat.

Să se decidă dacă legea este:

a) comutativă;

b) asociativă;

c) admite element neutru.

Vasile Pop

**Soluţie.** a) $x*y = f(x, a, a, y) \overset{1)}{=} f(f(a, a, a, x), f(a, a, a, a), f(a, a, a, a), f(y, a, a, a))$

$$\overset{2)}{=} f(f(a, a, a, y), f(a, a, a, a), f(a, a, a, a), f(x, a, a, a)) = f(y, a, a, x) = y * x$$

b) $(x*y)*z = f(x*y, a, a, z) = f(f(x, a, a, y), f(a, a, a, a), f(a, a, a, a), f(a, a, a, z))$

$$\overset{2)}{=} f(f(x, a, a, a), f(a, a, a, a), f(a, a, a, a), f(y, a, a, z)) = f(x, a, a, y * z) = x * (y * z)$$

c) Elementul neutru este $e = a$:

$$x * a = f(x, a, a, a) = x \text{ şi } a * x = f(a, a, a, x) = x, \ \forall \ x \in G.$$

Observaţie. $(G, *)$ este grup, simetricul lui $x$ este $x' = f(a, x, x, a)$

$$x * x' = f(x, a, a, f(a, x, x, a)) = f(f(a, a, a, x), f(a, a, a, a), f(a, a, a, a), f(a, x, x, a))$$

$= f(f(a,a,a,a), f(a,a,a,x), f(a,a,a,x), f(x,a,a,a)) = f(a,x,x,x) = a = e$

Exemplu: $f : \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3,\ f(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}, \widehat{t}) = \widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{z} + \widehat{t}$

$$\widehat{x} * \widehat{y} = \widehat{x} + \widehat{y} + 2\widehat{a},\ \ \widehat{a} \in \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$$

Se obţin trei operaţii de grup pe $\mathbb{Z}_3$

$$\widehat{x} * \widehat{y} = \widehat{x} + \widehat{y},\ \ \widehat{x} * \widehat{y} = \widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{1} \text{ şi } \widehat{x} * \widehat{y} = \widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{2}.$$