INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA MUREŞ

SCOALA GIMNAZIALA « MIHAI VITEAZUL » TG.MUREŞ

CONCURSUL DE MATEMATICĂ «NUMERUS »

Ediția a XI-a

24 noiembrie 2012

Clasa a V-a

Subiectul 1.

Într-o cutie sunt 75 de bomboane. Andrei îşi serveşte prietenii cu bomboane astfel: primul ia o bomboană, al doilea 2 bomboane şi al treilea 3 bomboane şi aşa mai departe. Apoi îşi serveşte prietenii în ordine inversă: ultimul ia o bomboană, penultimul ia 2 bomboane etc. Lui Andrei îi rămân 3 bomboane. Câți prieteni are Andrei?

Soluție

1 punct din oficiu

75 – 3= 72 **(1p)**

$$\left.\begin{matrix} 1+ & 2+ & 3+ & \dots & +x \\ x+ & x-1+ & x-1+ & \dots & +1 \end{matrix}\right\} 72 \Rightarrow 2(1+2+\dots+x)=72 \Rightarrow 1+2+\dots+x=36 \Rightarrow$$

$x(x+1):2=36 \Rightarrow$ **(4p)** $\Rightarrow x(x+1)=72=8\cdot 9 \Rightarrow x=8$.**(1p)**

Subiectul 2.

Se consideră numărul

$a=\{\{2\cdot(3^5\cdot 9^{10})^4:81^{24}-[(4^2+3^2):5^2]^{100}-1\}:2^4\}^{2012}:25^{1006}$.

a) Calculați numărul a

b) Sfertul numărului a este pătrat perfect? Dar cub perfect? Justificați răspunsul.

Soluție

1 punct din oficiu

a)

a= $\{\{2\cdot(3^5\cdot 3^{20})^4 : 3^{96} - [(5^2):5^2]^{100} - 1\} : 2^4\}^{2012} : 5^{2012} =$ **(1p)**

$= \{\{2\cdot 3^{100} : 3^{96} - 1^{100} - 1\} : 2^4\}^{2012} : 5^{2012} =$ **(1p)**

$= \{160 : 16\}^{2012} : 5^{2012} = (10:5)^{2012} = 2^{2012}$ **(2p)**

b) $a:4 = 2^{2012} : 2^2 = 2^{2010} = (2^{1005})^2 = (2^{335})^3$ **(2p)**

Deci a este pătrat şi cub perfect.

Subiectul 3.

Un joc pentru copii are întrebări de 3 puncte şi întrebări de 5 puncte. Jocul constă în două tipuri de întrebări. Pentru o întrebare uşoară se câştigă 3 puncte iar pentru una dificilă 5 puncte. Jocul se termină atunci când jucătorul adună 2012 de puncte.

a) Să se arate că jucătorul poate aduna exact 8 puncte, 9 puncte sau 10 puncte, folosind întrebările date.

b) Să se arate că jucătorul **nu** poate aduna exact 7 puncte, folosind întrebările date.

c) Să se arate că, folosind aceste întrebări, jucătorul poate aduna orice punctaj cuprins între 8 puncte şi 2012 de puncte.

Soluție

1 punct din oficiu

a) 5 + 3 = 8 $\Rightarrow$ cu un întrebare de 5 puncte şi unul de 3 puncte se câştigă 8 puncte.

3 + 3 + 3 = 9 $\Rightarrow$ cu 3 întrebări de câte 3 puncte se câştigă 9 puncte.

5 + 5 = 10 $\Rightarrow$ cu două întrebări de 5 puncte se câştigă 10 puncte. **(1p)**

b) Cu două întrebări de 3 puncte se câştigă 6 puncte.

Cu un întrebare de 3 puncte şi unul de 5 puncte se câştigă 8 puncte.

Cu două de 5 puncte se câştigă 10 puncte. Deci nu poate primi 7 puncte. **(2p)**

c) Am arătat la punctul **a)** că poate primi 8 puncte, 9 puncte si 10 puncte. Adunând 3 puncte la fiecare (adică un întrebare în plus) obținem 11 puncte, 12 puncte şi 13 puncte, adunând încă 3 puncte obținem 14 puncte, 15 puncte şi 16 puncte etc. Altfel spus, dacă punctajul este de forma 3*k*, atunci folosim *k* întrebări de 3 puncte Dacă punctajul este de forma 3*k* + 1, atunci folosim *k* – 3 întrebări de 3 puncte şi 2 întrebări de 5 puncte.

Dacă punctajul este de forma 3*k* + 2, atunci folosim *k* – 1 întrebări de 3 puncte şi Un întrebare de 5 puncte. Obligatoriu, orice punctaj, s-ar afla într-una din situațiile de mai sus, deci orice punctaj cuprins între 8 puncte şi 2012 de puncte, poate fi obținut **(3p)**

Subiectul 4.

Se dau numerele $a_1 = 4,\ a_2 = a_1 + 3\cdot 4,\ a_3 = a_2 + 3\cdot 4^2, \dots, a_{99} = a_{98} + 3\cdot 4^{98}$.

a) Determinați numărul a_{10};

b) Arătați că produsul p=$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99}$, are cel puțin 2971 de cifre.

Soluție

1 punct din oficiu

a)

$a_1 = 4$

$a_2 = 4 + 3\cdot 4 = 4^2$

$a_3 = 4^2 + 3\cdot 4^2 = 4^3$

...

$a_{99} = 4^{98} + 3\cdot 4^{98} = 4^{99}$

Deci, $a_{10} = 4^{10}$ **(3p)**

b)

$$p=4\cdot 4^2\cdot 4^3\cdot\ldots\cdot 4^{99}=4^{1+2+3+\ldots+99}=4^{99\cdot 50}=4^{4950}=2^{9900}=(2^{10})^{990}=1024^{990}>1000^{990}=10^{3\cdot 990}=10^{2970}$$

$\Rightarrow\ p>\underbrace{100\ldots0}_{2970\,cifre}\ \Rightarrow$ p are cel puțin 2971 cifre **(3p)**

NOTA: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.