INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA MUREŞ

SCOALA GIMNAZIALA « MIHAI VITEAZUL » TG.MUREŞ

CONCURSUL DE MATEMATICĂ «NUMERUS »

Ediția a XI-a

24 noiembrie 2012

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

Subiectul 1.

Cifrele a , b şi c ale numărului $\overline{abc}$ sunt direct proporționale cu cifrele x,y,z ale numărului $\overline{xyz}$. Se știe că $\overline{xyz} \vdots 3$. Arătați că dacă $a \vdots x$, atunci numărul $\overline{abc} \vdots 3$.

Soluție

1 punct din oficiu

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k \ => a = kx,\ b = ky, c = kz \ \ \overline{abc} \vdots 3 \ <=> a + b + c \vdots 3 \ <=>$ **(4p)**

$k\,(x + y + z) \vdots 3$ adevărat pentru că $\overline{xyz} \vdots 3$ **.(2p)**

Subiectul 2. Fie suma $S_n = \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \ldots + \frac{n^2+5n+7}{n^2+5n+6}, \quad n \in N$.

a) Calculați suma S_n .

b) Cercetați dacă există $n \in N^*$ astfel încât $S_n \in N$.

Soluție

1 punct din oficiu

a)

$$S_n = 1+\frac{1}{6}+1+\frac{1}{12}+1+\frac{1}{20}...+1+\frac{1}{n^2+5n+6}$$
$$S_n = (n+1)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}...+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$$
$$S_n = (n+1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$S_n = (n+1)+\frac{n+1}{2(n+3)}$$
$$S_n = (n+1)\left(1+\frac{1}{2(n+3)}\right) \Rightarrow S_n = \frac{(n+1)(2n+7)}{2(n+3)}$$

(4p)

b)

$$\left.\begin{array}{l} (n+1)+\dfrac{n+1}{2(n+3)} \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{2(n+3)} \in N^* \\ \dfrac{n+1}{2(n+3)}\ subunitara \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\ n \in N^*\ a.i. S_n \in N$$

(2p)

Subiectul 3. Fie triunghiul ABC în care $m(\prec ABC) = 2\cdot m(\prec ACB), AD \perp BC, D \in (BC)$. Dacă E şi C sunt de o parte şi alta a dreptei AB, cu $BE \perp AE$, m($\prec$EAB)=m($\prec$ACB), (EM bisectoarea $\prec$AED, M$\in$AC şi AE$\cap$BC={H}. Arătaţi că :

a) triunghiurile ABH şi AHC sunt isoscele

b) MCDE paralelogram

c) $P_{MCDE} = P_{ABC}$

Gazeta matematica 10/2012

Soluție

1 punct din oficiu

a) $\boldsymbol{Fie}\ m(< ACB) = x \Rightarrow m(< ABC) = 2x \Rightarrow m(< BAH) = x$

$m(< ABH) = 180 - 2x, m(< BAH) = x => m(< H) = x = m(< BAH) = m(ACH) =>$

$=> \Delta BHA$ *isoscel si* ΔACH *isoscel* $=> AB = BH = a$ *și* $AC = AH = 2b$. **(2p)**

b)

BE *înălțime în* ΔABH *isoscel* $=> BE$ *mediana* $=> E$ *mijlocul* $[AH] => AE = EH = b$

AD *înălțime în* ΔACH *isoscel* $=> AD$ *mediana* $=> D$ *mijlocul* $[CH] =>$

$=> HD = DC = a + c$, *unde* $c = BD$.

Deci ED linie mijlocie în $\Delta HAC => DE || AC$ (1)

și $ED = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AH = b$

$=> \Delta EHD$ *isoscel* $=> m(< EDH) = m(< EHD) = x$

ΔEAD *isoscel*, EM *bisectoare* $=> EM$ *mediatoarea* $[AD] => EM \perp AD$. Dar $DC \perp AD$ $=> EM || DC$ *(2)*

Din (1) și (2) => MCDE parallelogram **(3p)**

c) MCDE paralelogram =>MC=ED=b => AM=b

$P_{MCDE}=2b+2(a+c)=2(a+b+c)$

$P_{ABC}=a+c+a+c+2b=2(a+b+c) => P_{MCDE} = P_{ABC}$ **(1p)**

Subiectul 4.

Fie ABC un triunghi oarecare.Paralela prin B la AC se intersecteaza cu paralela prin C la AB in punctul A’, paralela prin C la AB se intersecteaza cu paralela prin A la BC in punctul B’, iar paralela prin A la BC se intersecteaza cu paralela prin B la AC in punctul C’. Aratati ca inaltimile triunghiului ABC sunt mediatoarele laturilor triunghiului A’B’C’.

Gazeta matematica 2012

Soluție

1 punct din oficiu

Fie
$\boldsymbol{AD \cap BE \cap CF = \{H\}, ortocentrul\ și\ A'B', B'C', C'A' paralele\ la\ AB, BC, respectiv\ AC}$
$\boldsymbol{duse\ prin\ vârfurile\ \Delta\, ABC}$.

ABCB' parallelogram => BC=AB' **(1p)**
ACBC' parallelogram => BC=AC'. Deci A mijl. [B'C'] (1) **(1p)**
AD ⊥ BC, BC || B'C' => AD ⊥ B'C' (2) **(1p)**
Din (1) și (2) => înălțimea AD a $\boldsymbol{\Delta\, ABC}$ este mediatoarea [B'C']. **(1p)**

Analog demonstram ca BE mediatoarea [A'C'] și CF mediatoarea [A'B'] **(2p)**
NOTA: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.