INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA MUREŞ

SCOALA GIMNAZIALA « MIHAI VITEAZUL » TG.MUREŞ

CONCURSUL DE MATEMATICĂ «NUMERUS »

Ediția a XI-a

24 noiembrie 2012

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

Subiectul 1.

Fie a și b numere reale pozitive. Să se arate că :
$a\sqrt{a}+b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$

Soluție

1 punct din oficiu

$a\sqrt{a}+b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ <=> $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a} \geq 0$ <=> **(2p)**
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ evident ! **(4p)**

Subiectul 2.

Să se calculeze suma

$$S=[\sqrt{1\cdot 2}]+[\sqrt{2\cdot 3}]+[\sqrt{3\cdot 4}]+...+[\sqrt{2011\cdot 2012}],$$

unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x.

Soluție

1 punct din oficiu

$n^2 \leq n^2+n<(n+1)^2 \Rightarrow n \leq [\sqrt{n(n+1)}]<n+1 \Rightarrow [\sqrt{n(n+1)}]$=n => **(4p)**

1. S=1+2+3+...+2011=2011 · 2012:2=2023066 **(2p)**

Subiectul 3.

a) Pentru $a,b,c,d \in Q$, astfel încât $ab+bc+ca=2012$, să se arate că

$$\sqrt{(2012+a^2)(2012+b^2)(2012+c^2)} \in Q .$$

b) Determinați numerele întregi *a* şi *b* pentru care

$$\frac{a}{\sqrt{2(2+\sqrt{3})}}+\frac{b}{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}}=\sqrt{19-8\sqrt{3}} .$$

Soluție

1 punct din oficiu

. **a)**

$$2012+a^2=ab+bc+ca+a^2=a(b+a)+c(b+a)=(b+a)(a+c)$$

$$2012+b^2=ab+bc+ca+b^2=b(b+a)+c(b+a)=(b+a)(b+c)$$

$$2012+c^2=ab+bc+ca+c^2=c(c+a)+b(a+c)=(a+c)(b+c)$$

Avem

$$\sqrt{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}=(a+b)(a+c)(b+c)\in Q .$$ **(3p)**

b)

$$\frac{a}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{b}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow \frac{a}{|\sqrt{3}+1|}+\frac{b}{|\sqrt{3}-1|}=|4-\sqrt{3}| \Leftrightarrow$$ **(1p)**

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{3}+1}+\frac{b}{\sqrt{3}-1}=4-\sqrt{3} \Leftrightarrow a(\sqrt{3}-1)+b(\sqrt{3}+1)=2(4-\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(a+b)+(-a+b)=8-2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ -a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=3 \end{cases} .$$ **(2p)**

Subiectul 4.

Considera patru puncte necoplanare A, B, C, D cu AB=AC. Fie $E \in (AB), F \in (AC)$

astfel incat AE=CF si M, N mijloacele segmentelor AD, respectiv EF.

Daca $EF \cap (BCD) = \{Q\}, EM \cap (BCD) = \{S\}$ aratati ca:

a) F,C şi intersecția lui AN cu BC sunt vârfurile unui triunghi isoscel;
b) Dreapta MN este paralela (BCD);
c) Dreapta MN este paralela cu QS.

Prof.Vasile Gînța, Tg.-Mureş

Soluție

1 punct din oficiu

a) Fie EP||AC,P $\in$BC =>(T. TH.) $\frac{EB}{EA} = \frac{BP}{PC}$

Fie FP'||AB,P' $\in$BC =>(T. TH.) $\frac{AF}{FC} = \frac{BP'}{P'C}$, dar $\frac{EB}{EA} = \frac{AF}{FC}$ => $\frac{BP'}{P'C} = \frac{BP}{PC}$ => P=P' **(2p)**

Deci AEPF paralelogram => N mijlocul segmentelor AP şi EF

AE=FP=CF => C, F, P sunt vârfurile unui triunghi isoscel

(2p)

b) MN linie mijl. În triunghiul APD => MN||PD => MN||(BCD) **(1p)**

c) MN||PD, (EQS) $\cap$(BCD) = QS => MN||QS **(1p)**

NOTA: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.