Şimleu Silvaniei, 17 Noiembrie, 2012

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a VII-a

CLASA A IX-A

Problema 1 *Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Demonstraţi că*

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2.$$

Problema 2 *Găsiţi numerele reale x, pentru care egalitatea de mai jos este bine definită şi adevărată*

$$\frac{8}{\{x\}}=\frac{9}{x}+\frac{10}{[x]}.$$

S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x, respectiv cu $\{x\}$ partea fracţionară a lui x.

Problema 3 *Considerăm triunghiul $\triangle ABC$ în care O este centrul cercului circumscris, H ortocentrul şi G centrul de greutate. Pe semidreptele $(OA, (OB$ şi $(OC$ se consideră punctele D, E respectiv F astfel încât $\frac{OD}{OA}=\frac{OE}{EB}=\frac{OF}{OC}=k$, unde $k>2$ şi pe segmentele $(DB), (EC), (AF)$ se consideră punctele M, N, P astfel ca $\frac{DM}{MB}=\frac{EN}{NC}=\frac{FP}{PA}=k-2$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului $\triangle MNP$ este mijlocul lui (HG).*

Problema 4 *Să se determine produsul maxim care se poate obţine prin înmulţirea unor numere naturale, nu neapărat distincte, ce au suma* 100. *De exemplu numerele* 50, 50 *dau produsul* 2500, *pe când numerele* 20, 20, 20, 20, 20 *dau produsul* 3200000.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore.*