Concursul Interjudeţean de Matematică
"Teodor Topan" Ediţia a VII-a

Şimleu Silvaniei, 17 Noiembrie, 2012

Clasa a VIII-a

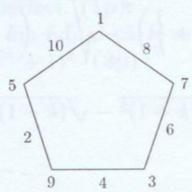
1) a) Demonstraţi că pentru orice număr $k \in \mathbb{N},\ k \neq 0$ are loc egalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{k}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{k^2+(k+1)^2}-\sqrt{(k-1)^2+k^2}\right).$$

b) Fie $a_n=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$. Arătaţi că $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}$ este un număr natural.

2) Fie n un număr natural impar, iar b o cifră diferită de 0. Arătaţi că numărul $\sqrt{b\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ de zero}}b}$ este iraţional. (Gazeta Matematică)

3) Putem aşeza în mai multe moduri în vârfurile şi pe laturile unui pentagon numerele de la 1 la 10 astfel încât suma celor trei numere corespunzătoare fiecăreia din cele 5 laturi să fie aceeaşi. Numim o asemenea aşezare "aranjare bună" şi notăm cu s suma numerelor de pe o latură a unei aranjări bune. Figura de mai jos exemplifică o aranjare bună cu $s = 16$.



a) Demonstraţi că suma numerelor din vârfurile pentagonului într-o aranjare bună este multiplu de 5.

b) Aflaţi cea mai mică valoare posibilă pentru s.

4) Fie x un număr real strict pozitiv. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu x_n numărul $x^n+\frac{1}{x^n}$.

a) Arătaţi că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc egalitatea

$$x_n \cdot x_1 = x_{n+1} + x_{n-1}$$

şi deduceţi că $x_{n+1}-x_n \geq x_n - x_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

b) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m < n$. Demonstraţi că $x_m \leq x_n$ şi aflaţi numerele x pentru care $x_m = x_n$.

Timp de lucru: 3 ore