Şimleu Silvaniei, 17 Noiembrie, 2012

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a VII-a

CLASA A XI-A

Problema 1 *Fie şirul* $(a_n)_{n\geq 0}$*, dat de relaţia de recurenţă*

$$a_{n+1} = \frac{c}{a_n} + \frac{a_n}{2},$$

unde $a_0 = 2c$*, iar* c *este un parametru fixat cu* $\frac{1}{2} < c < \frac{9}{2}$.
a) Arătaţi că $(a_n)_{n\geq 0}$ *este convergent si aflaţi limita sa.*
b) Demonstraţi că

$$|a_n - \sqrt{2c}| \leq \left(\frac{\sqrt{2c}-1}{2}\right)^{2^n} \cdot 2\sqrt{2c}.$$

Ce puteţi spune, în acest caz, despre $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot |a_n - \sqrt{2c}|$ *?*

Problema 2 *Determinaţi valoarea determinantului matricei*

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 & \dots & 1 \\ 1 & p & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & p \end{pmatrix}$$

, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este o matrice pătratică de ordinul n ce are ca şi elemente* $p \in \mathbb{R}$ *pe diagonala principală şi 1 in rest.*

Problema 3 *O matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se numeşte ortogonală dacă* $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$*, unde* A^T *este transpusa matricei A. Se consideră* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *două matrici ortogonale. Dacă n, ordinul matricilor, este impar atunci să se arate că cel puţin una dintre matricile* $A+B, A-B$ *este singulară.*

Problema 4 *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *dat de* $x_0 = 0, x_1 = 1$ *şi* $x_{n+1} = \frac{x_n + nx_{n-1}}{n+1}$ *pentru* $n \geq 1$*. Arătaţi că şirul* (x_n) *este convergent.*